



МА́РКОВА ЦЕПЬ

Авторы: А. В. Прохоров

МА́РКОВА ЦЕПЬ, последовательность зависимых случайных величин X_0, X_1, X_2, \dots со значениями из множества натуральных чисел, обладающая тем свойством, что условное распределение случайной величины $X_n, n \geq 1$, зависит только от значения X_{n-1} и не зависит от всех предыдущих значений, т. е. условная вероятность $\mathbf{P}\{X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbf{P}\{X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}\}$.

Это свойство, определяющее М. ц., называется марковским свойством и является обобщением понятия независимости. М. ц. появились в исследованиях А. А. [Маркова](#) (1907) и послужили началом создания теории марковских процессов. С общей точки зрения М. ц. представляет собой [марковский процесс](#) с дискретным временем $n=0, 1, 2, \dots$ и конечным или счётным множеством состояний; состояния М. ц. суть возможные значения случайных величин X_0, X_1, \dots . Если условные вероятности $\mathbf{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}, i, j = 1, 2, \dots$, одинаковы для всех n , соответствующая М. ц. называется однородной (по времени). Вероятности $p_{ij} = \mathbf{P}\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\}$ называются переходными вероятностями однородной М. ц.; в совокупности они составляют квадратную матрицу $\mathbf{P} = \left\| p_{ij} \right\|, i, j = 1, 2, \dots$, элементы которой $p_{ij} \geq 0$ для всех i, j и $\sum_j p_{ij} = 1$; такие матрицы называются стохастическими. Распределение $p_k(0) = \mathbf{P}\{X_0 = k\}, k = 1, 2, \dots$, случайной величины X_0 называют начальным распределением М. ц. Совместное распределение X_0, X_1, \dots, X_n выражается через элементы матрицы \mathbf{P} и распределение $\{p_k(0), k = 1, 2, \dots\}$: $\mathbf{P}\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}$. Переходные вероятности из состояния i в состояние j за n шагов $p_{ij}(n) = \mathbf{P}\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}$ удовлетворяют уравнению Колмогорова – Чепмена $p_{ij}(n_1 + n_2) = \sum_k p_{ik}(n_1) p_{kj}(n_2)$, а соответствующие матрицы $\mathbf{P}_n = \left\| p_{ij}(n) \right\|$ – соотношению $\mathbf{P}_{n_1 + n_2} = \mathbf{P}_{n_1} \mathbf{P}_{n_2}$. Переходные вероятности $p_{ij}(n)$ однозначно определяются матрицей \mathbf{P} , т. к. $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^n$. Т. о., все распределения М. ц. полностью задаются матрицей \mathbf{P} и начальным распределением $\{p_k(0), k = 1, 2, \dots\}$.

Важным классом М. ц. являются т. н. эргодич. М. ц., переходные вероятности которых $p_{ij}(n)$ обладают тем свойством, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j \geq 0, j = 1, 2, \dots$, где числа $p_j, j = 1, 2, \dots, \sum_j p_j = 1$, представляют собой единственное решение системы уравнений $p_j = \sum_i p_{ij} p_i, j = 1, 2, \dots$. Числа p_j интерпретируются в этом случае как вероятности того, что М. ц. через очень большое время n окажется в состоянии j независимо от начального распределения. Такое распределение $p_j, j = 1, 2, \dots$, называется стационарным распределением М. ц. с переходной матрицей \mathbf{P} ; оно обладает следующим свойством: если $\mathbf{P}\{X_0 = j\} = p_j, j = 1, 2, \dots$, то при любом $n \mathbf{P}\{X_n = j\} = p_j$, т. е. если начальное распределение совпадает со стационарным, то распределения случайных величин $X_n, n = 0, 1, \dots$, не зависят от n . Соответствующая М. ц. называется стационарной; см. [Стационарный случайный процесс](#).

Литература

Лит.: Чжун Кай-лай. Однородные цепи Маркова. М., 1964; Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.,

1970; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. 2-е изд. М., 2010.

Processing math: 0%