



# ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Авторы: В. И. Маркин

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ, раздел современной *символической логики*, изучающий рассуждения и др. языковые контексты с учётом внутренней структуры входящих в них простых *высказываний*; при этом выражения языка трактуются функционально, т. е. как знаки некоторых функций или аргументов этих функций.

Важнейшая особенность Л. п. состоит в том, что т. н. общие имена (напр., «человек», «город», «металл»), знаки свойств («белый», «умный», «электропроводный») и знаки отношений («старше», «севернее», «тяжелее») рассматриваются как принадлежащие одной категории знаков, а именно категории предикатных символов, репрезентирующих функции, возможными аргументами которых являются объекты некоторого универсума рассмотрения, а значениями – истинностные оценки (в классич. логике – это «истина» и «ложь»). Предикатные символы различаются своей местностью: символы, представляющие предметно-истинностные функции от одного аргумента, называются одноместными, от двух аргументов – двухместными и т. д. (напр., предикатный символ «человек» одноместный, а «севернее» двухместный).

Другой отличит. чертой Л. п. является использование особого типа логич. символов – *кванторов* и связываемых ими (квантифицируемых) переменных для воспроизведения логич. форм множественных высказываний. Квантифицируемые переменные «пробегают» по множеству всех объектов рассмотрения, а роль квантора состоит в указании на ту часть объектов этого множества, для которых справедливо содержащееся в высказывании утверждение. Наиболее употребимы в логике квантор общности  $\forall$  (в естеств. языке ему соответствуют термины типа «всякий», «каждый», «любой», «произвольный») и квантор существования  $\exists$  («существует», «найдётся», «имеется», «некоторый»).

Л. п. как раздел символич. логики включает в себя логич. теории разных типов, отличающиеся как выразительными возможностями языков, в которых они формулируются, так и классами выделяемых в них *логических законов*.

Различают Л. п. первого порядка и Л. п. высших порядков. В Л. п. первого порядка имеется лишь один тип квантифицируемых переменных – предметные (индивидуальные) переменные, возможными значениями которых являются индивиды (структура множественных высказываний воспроизводится здесь посредством формул вида  $\forall xA$  – «Для всякого индивида  $x$  верно, что  $A$ »,  $\exists xA$  – «Существует индивид  $x$ , такой, что  $A$ »). В Л. п. второго порядка дополнительно вводятся переменные для различения признаков индивидов – их свойств и отношений между ними (эти переменные тоже разрешается связывать кванторами, получая выражения типа  $\forall PA$  – «Для всякого свойства  $P$  верно, что  $A$ »,  $\exists RA$  – «Существует отношение  $R$ , такое, что  $A$ »); в Л. п. третьего порядка разрешается квантификация по признакам признаков индивидов и т. д.

Выделяют также односортовые и многосортные системы Л. п.: в односортной Л. п. все переменные, принадлежащие к одному и тому же типу, имеют одинаковую область пробега; в многосортной Л. п. с каждой переменной связывается собств. множество её возможных значений.

Л. п. включает как классич., так и неклассич. логич. теории. В основе классич. Л. п. лежат общие для всех классич. систем логики двузначности принцип и принцип экстенциональности (значение сложного выражения зависит только от значений составляющих его выражений). Кроме того, в классич. Л. п. принимаются специфические именно для кванторной теории предпосылки экзистенциального характера – допущение о существовании объектов в предметной области и существовании денотатов у сингулярных (единичных) терминов. В неклассич. предикатных системах в той или иной форме происходит пересмотр указанных принципов. Напр., в свободной логике отказываются от обязат. существования индивидов в области интерпретации, а также допускается пустота единичных терминов.

Язык классич. Л. п. первого порядка задаётся следующим образом. В качестве логич. символов вводятся некоторая функционально полная система пропозициональных связок (см. Логика высказываний) и кванторы. В алфавите содержится также бесконечный список предметных (индивидных) переменных. Среди нелогич. символов обязательно наличие непустого множества предикатных констант – аналога предикатных символов естеств. языка. Кроме того, в алфавит могут быть введены нелогич. символы других типов: предметные константы – аналоги собств. имён естеств. языка, а также предметно-функциональные константы разл. местности – аналоги предметных функторов (напр., «+», «возраст», «расстояние от... до...»). Технич. символами алфавита являются левая и правая скобки и запятая. В Л. п. имеется два типа правильно построенных выражений – термы (аналоги любых имён) и формулы (аналоги предложений).

Семантич. построение классической односортной Л. п. первого порядка может осуществляться разл. способами. Наиболее известны объектная и подстановочная семантики Л. п. Суть объектной семантики состоит в выборе некоторой непустой предметной области  $U$  (универсума рассмотрения) и интерпретирующей функции  $I$ , сопоставляющей с нелогич. символами языка некие сущности (индивиды, предметно-истинностные и предметные функции), релятивизированные относительно  $U$ . Пару  $\langle U, I \rangle$  называют моделью или возможной реализацией. Далее задаются правила приписывания значений термам и формулам в модели  $\langle U, I \rangle$ . При этом формула  $\forall x A$  истинна в том случае, когда  $A$  истинно, какой бы объект из  $U$  мы ни приписали в качестве значения переменной  $x$  (сохранив при этом значения остальных переменных),  $\exists x A$  истинна, если в универсуме найдётся такой объект, что при сопоставлении его в качестве значения переменной  $x$  формула  $A$  оказывается истинной. Законами Л. п. объявляются формулы, истинные в каждой модели  $\langle U, I \rangle$  (универсально общезначимые формулы). Смысл подстановочной семантики состоит в формулировке таких критериев истинности и ложности предложений языка, которые не предполагают соотнесения последних с внеязыковой действительностью, а опираются только на информацию о значениях элементарных формул. Здесь теория понимается как дедуктивно замкнутое множество предложений языка. Предложение вида  $\forall x A$  ( $\exists x A$ ) объявляется истинным в теории, если соответствующее бескванторное утверждение справедливо для любого (хотя бы для одного) единичного термина, принадлежащего словарю данной теории.

Класс универсально общезначимых формул Л. п. первого порядка может быть формализован, т. е. существуют исчисления (синтаксически построенные логич. системы), классы теорем которых совпадают со множеством законов семантически построенной Л. п. (см. Предикатов исчисление). Данный факт впервые установлен К. Гёделем (1930). Л. п. высших порядков являются принципиально неформализуемыми, т. е. нельзя построить адекватные им исчисления.

Среди др. метатеоретич. свойств Л. п. следует отметить её неразрешимость (отсутствие эффективной процедуры, позволяющей в конечном числе шагов определять, является ли произвольная формула законом Л. п.), установленную А. Чёрчем (1936), и синтаксич. неполноту исчисления предикатов (т. е. возможность добавления в качестве новых аксиом некоторых недоказуемых формул без получения в системе противоречия). Последнее даёт возможность построения на базе Л. п. нетривиальных прикладных теорий. В этом случае вместо абстрактных предметных, предикатных и предметно-функциональных констант в алфавит вводятся конкретные термины словаря теории – имена объектов её предметной области, знаки их свойств и отношений, знаки заданных на данной области предметных функций. Сами прикладные теории первого порядка (их часто называют элементарными) строятся обычно аксиоматически: к логич. части (аксиомам и правилам вывода исчисления предикатов) добавляется собств. часть прикладной теории – постулаты, отражающие закономерности её предметной области. Простейшими примерами теорий первого порядка являются т. н. теории (логики) отношений: Л. п. с равенством, теория отношений эквивалентности, разл. теории порядка. Наиболее известная элементарная теория – система формальной арифметики Дж. [Пeano](#).

## Литература

Лит.: Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М., 1947; Черч А. Введение в математическую логику. М., 1960. Т. 1; Van Heijenoort J. From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879–1931. Camb. (Mass.), 1967; Смирнов В. А. Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972; A philosophical companion to first-order logic / Ed. R. I. G. Hughes. Indianapolis, 1993; Smullyan R. M. First-order logic. N. Y.; L., 1995. См. также лит. при ст. [Математическая логика](#).

Processing math: 0%