



ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, функция, обратная к [показательной функции](#), обозначается $y = \ln x$, её значение y , соответствующее значению аргумента x , называется натуральным [логарифмом](#) числа x . Равенство, определяющее Л. ф., равносильно равенству $x = e^y$, где $e = 2,71828\dots$ — [неперово число](#). Т. к. $e^y > 0$ при любом действительном y , то Л. ф. определена только при $x > 0$.

В более общем смысле Л. ф. называют функцию $y = \log_a x$, где положительное a , $a \neq 1$, — основание логарифмов. Однако в математич. анализе особое значение имеет функция $\ln x$; функция $\log_a x$ приводится к ней по формуле $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Л. ф. — одна из [элементарных функций](#). Осн. свойства Л. ф. вытекают из свойств показательной функции и логарифмов; напр., Л. ф. удовлетворяет функциональному уравнению $\ln(xy) = \ln x + \ln y$. Для $-1 < x \leq 1$ справедливо разложение в степенной ряд $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Л. ф. имеет производные всех порядков $(\ln x)' = 1/x$, $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x^n$, $n = 2, 3, \dots$

Через Л. ф. выражаются мн. неопределённые интегралы, напр. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C$.

Л. ф. часто встречается в математич. анализе и его приложениях.

Л. ф. была известна математикам 17 в. Впервые зависимость между переменными величинами, выражаемая Л. ф., рассматривалась Дж. [Непером](#) (1614).

Л. ф. $\ln z$ комплексной переменной z является многозначной (бесконечнозначной) функцией, определённой при всех значениях $z \neq 0$ равенством $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{arg} z + 2\pi k i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\operatorname{arg} z$ — гл. значение аргумента [комплексного числа](#) z , $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$, i — мнимая единица. Точки 0 и ∞ — точки ветвления бесконечного порядка функции $\ln z$. В каждой области комплексной плоскости, которая не содержит точку $z = 0$ и в которой не существует замкнутых кривых, содержащих эту точку внутри себя, можно выделить непрерывную однозначную ветвь функции $\ln z$. Напр., в области $G = \{z: -\pi < \operatorname{arg} z < \pi\}$ такой ветвью является $\ln z = \ln|z| + i \operatorname{arg} z$, причём $\ln z$ — [аналитическая функция](#) в области G , а её производная $(\ln z)' = 1/z$. Все значения Л. ф. для отрицательных действительных z являются комплексными числами. Первая теория Л. ф. в комплексной плоскости была построена Л. [Эйлером](#) (1749).