

# ЛОБАЧЁВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ

Авторы: А. Д. Александров

ЛОБАЧЁВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ, одна из неевклидовых геометрий, основана на тех же посылках, что и обычная — евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на иную. Евклидова аксиома о параллельных состоит в том, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более чем одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её (в евклидовой геометрии такие прямые называют параллельными). В Л. г. эта аксиома заменяется следующей: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её (достаточно, чтобы это было выполнено для одной точки и одной прямой). Начало Л. г. было положено Н. И. [Лобачевским](#), который впервые сообщил о ней в 1826. Несколько позднее эту же теорию предложил Я. [Больяй](#); поэтому Л. г. иногда называют геометрией Лобачевского — Больяя. Её также называют неевклидовой геометрией, хотя обычно термину «неевклидова геометрия» придают более широкий смысл, включая сюда и др. теории, возникшие вслед за Л. г., а также теории, основанные на изменении посылок евклидовой геометрии. Л. г. иногда называют гиперболич. неевклидовой геометрией в противоположность эллиптич. геометрии Римана (см. [Неевклидовы геометрии](#), [Римана геометрия](#)).

Л. г. представляет собой теорию, богатую содержанием и имеющую применения как в математике, так и в физике. Историч. значение Л. г. состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность существования геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало эпоху в развитии геометрии и математики вообще (см. [Геометрия](#)).

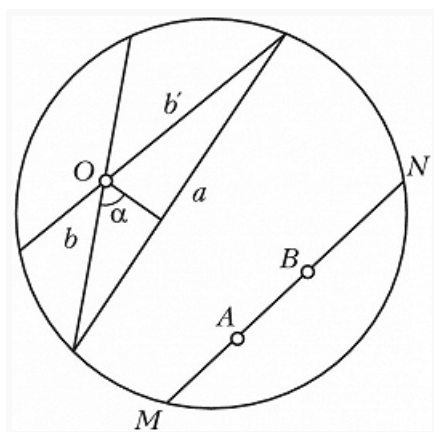


Рис. 1.

С совр. точки зрения можно дать, напр., следующее определение Л. г. на плоскости: Л. г. есть геометрия внутри круга на обычной (евклидовой) плоскости, лишь выраженная особым способом. Именно, внутренность круга, т. е. круг за исключением ограничивающей его окружности, называют «плоскостью» (рис. 1). Точкой «плоскости» является точка внутри круга. «Прямой» называют любую хорду (напр.,  $a, b, b', M \setminus N$ ) с исключёнными концами (т. к. окружность исключена из «плоскости»); «движением» — любое преобразование круга самого в себя, которое переводит хорды в хорды. Равными называются фигуры внутри круга, которые можно перевести одну в другую такими преобразованиями. Оказывается, что любой геометр. факт, описанный на таком языке, представляет теорему

или аксиому Л. г. Иными словами, всякое утверждение Л. г. на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах.

Евклидова аксиома о параллельных здесь не выполняется, т. к. через точку  $O$ , не лежащую на данной хорде  $a$  (т. е. «прямой»), проходит сколь угодно много не пересекающих её хорд («прямых», напр.  $b$  и  $b'$ ). Аналогично Л. г. в пространстве может быть определена как геометрия внутри шара, выраженная в соответствующих терминах

(«прямые» – хорды, «плоскости» – плоские сечения внутренности шара, «равные» фигуры – те, которые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар сам в себя и хорды в хорды). Таким образом, Л. г. имеет совершенно реальный смысл и столь же непротиворечива, как геометрия Евклида.

## Исторический очерк

Возникновение Л. г. связано с вопросом об аксиоме о параллельных, которая известна также как V постулат Евклида (под этим номером утверждение, эквивалентное приведённой выше аксиоме о параллельных, фигурирует в списке постулатов в *«Началах» Евклида*). Этот постулат ввиду его сложности по сравнению с другими вызвал многочисл. попытки его доказательства на основании др. постулатов.

Среди учёных, занимавшихся доказательством V постулата до 19 в.: *Птолемей*, *Прокл* (его доказательство основано на предположении о конечности расстояния между параллельными), араб. учёный Ибн аль-Хайсам (кон. 10 – нач. 11 вв.; пытался доказать V постулат, исходя из предположения, что конец движущегося перпендикуляра к прямой описывает прямую линию), *Омар Хайям* и азерб. математик Насирэддин Туси (13 в.) (при доказательстве V постулата исходили из предположения, что две сходящиеся прямые не могут при продолжении стать расходящимися без пересечения), нем. учёный Х. Шлюссель (Клавиус, 16 в.); итал. учёные П. Кательди (в 1603 впервые напечатал работу, целиком посвящённую вопросам о параллельных), Дж. Борелли (1658), Дж. Витали (1680); Дж. *Валлис* (1663, опубл. в 1693; основывал доказательство постулата на предположении, что для всякой фигуры существует ей подобная, но не равная фигура). Доказательства вышеперечисленных геометров сводились к замене V постулата др. предположением, казавшимся более очевидным. Итал. учёный Дж. Саккери (1733) сделал попытку доказать V постулат от противного. Приняв предположение, противоречащее постулату Евклида, Саккери получил из него довольно обширные следствия. Ошибочно признав некоторые из этих следствий приводящими к противоречиям, Саккери заключил, что постулат Евклида доказан. И. *Ламберт* (ок. 1766, опубл. в 1786) предпринял аналогичные исследования, однако он не повторил ошибки Саккери, а признал своё бессилие обнаружить в построенной им системе логич. противоречие. Попытки доказательства постулата предпринимались и в 19 в. Следует отметить работы А. *Лежандра*; одно из его доказательств (1800) основано на допущении, что через каждую точку внутри острого угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла, т. е., как и все его предшественники, он заменил V постулат др. допущением. К построению Л. г. подошли нем. учёные Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825).

Вопрос о V постулате Евклида, занимавший геометров более двух тысячелетий, был решён Лобачевским. Решение сводится к тому, что этот постулат не может быть доказан на основе др. посылок евклидовой геометрии и что принятие иного постулата позволяет построить геометрию, столь же содержательную, как и евклидова. Хотя Л. г. развивалась как умозрительная теория и сам Лобачевский называл её «воображаемой геометрией», тем не менее именно он рассматривал её не как игру ума, а как возможную теорию пространственных отношений. Доказательство её непротиворечивости было дано позднее, когда были указаны её интерпретации.

## Интерпретации (модели) геометрии Лобачевского

Л. г. изучает свойства плоскости Лобачевского в планиметрии и пространства Лобачевского в стереометрии. Плоскость Лобачевского – это плоскость (множество точек), в которой определены прямые линии (а также движения фигур, расстояния, углы и пр.), подчиняющиеся всем аксиомам евклидовой геометрии, за

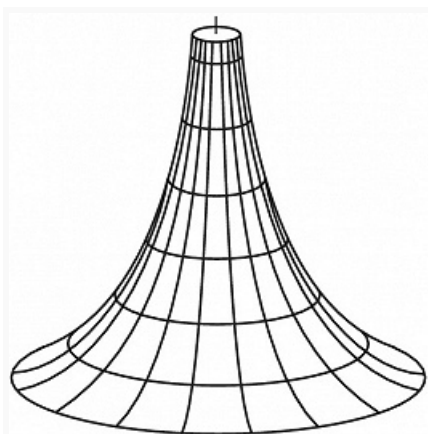


Рис. 2.

исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется сформулированной выше аксиомой Лобачевского. Сходным образом определяется пространство Лобачевского. Задача выяснения реального смысла Л. г. состояла в нахождении моделей плоскости и пространства Лобачевского, т. е. в нахождении таких объектов, в которых реализовывались бы соответствующим образом истолкованные положения планиметрии и стереометрии Л. г. В 1868 Э. [Бельтрами](#) заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример которых представляет [псевдосфера](#) (рис. 2). Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставить точки и кратчайшие

линии (геодезические) на псевдосфере и движению плоскости Лобачевского сопоставить перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, т. е. деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме Л. г. будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. Таким образом, Л. г. получает простой реальный смысл (интерпретация Бельтрами). При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере, однако здесь даётся интерпретация только геометрии на куске плоскости Лобачевского, а не на всей плоскости и тем более не в пространстве. В 1901 Д. [Гильберт](#) доказал, что в евклидовом пространстве не может существовать регулярной поверхности, геометрия на которой совпадает с геометрией всей плоскости Лобачевского.

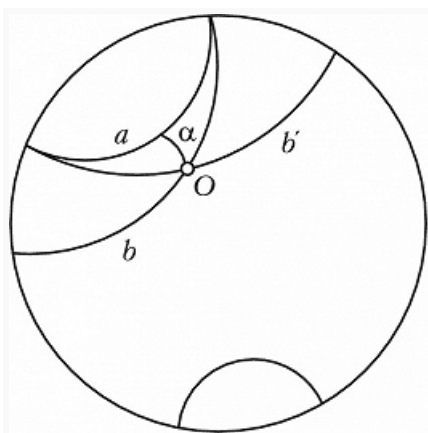


Рис. 3.

В 1871 Ф. [Клейн](#) указал описанную выше модель (интерпретация Клейна) как всей плоскости, так и пространства Лобачевского: плоскостью служит внутренность круга, а пространством – внутренность шара. В этой модели расстояние между точками А и В (рис. 1) определяется как  $\text{length} \left( \frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN} \right)$ . Позднее А. [Пуанкаре](#) в связи с задачами теории функций комплексного переменного дал другую модель (интерпретация Пуанкаре). В этой интерпретации за плоскость Лобачевского принимается внутренность круга (рис. 3), прямыми считаются дуги окружностей (напр.,  $a, b, b'$ ), перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями – преобразования, получаемые комбинациями [инверсий](#) относительно окружностей, дуги которых служат

прямыми. В модели Пуанкаре углы изображаются обычными углами. Модель Л. г. в пространстве строится аналогично.

Коротко модели Клейна и Пуанкаре можно определить так. В обоих случаях плоскостью Лобачевского может служить внутренность круга (пространством – внутренность шара), и Л. г. есть теория о тех свойствах фигур внутри круга (шара), которые в случае модели Клейна не изменяются при проективных, а в случае модели Пуанкаре – при конформных преобразованиях круга (шара) самого в себя (проективные преобразования переводят прямые в прямые, конформные – сохраняют углы).

Возможно чисто аналитич. определение модели Л. г. Напр., точки плоскости можно определять как пары чисел  $(x, y)$ , прямые можно задавать уравнениями, движения – формулами, сопоставляющими точкам  $(x, y)$  новые точки

$(x', y')$ ). Это абстрактно определённая аналитич. геометрия на плоскости Лобачевского, аналогичная аналитич. геометрии на евклидовой плоскости. Лобачевский дал основы своей аналитич. геометрии и тем самым фактически наметил такую модель, хотя полное её построение выяснилось уже после того, как на основе работ Ф. Клейна и др. выяснилось само понятие о модели. Др. аналитич. определение Л. г. состоит в том, что она определяется как геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны. Это определение было фактически дано Б. [Риманом](#) (1854) и включало модель Л. г. как геометрии на поверхностях постоянной кривизны. Однако Риман не связал прямо своих построений с Л. г., а его доклад, в котором он о них сообщил, не был понят и был опубликован лишь в 1868.

## Содержание геометрии Лобачевского

Лобачевский строил свою геометрию, отправляясь от основных геометрич. понятий и своей аксиомы, и доказывал теоремы геометрич. методом, подобно тому как это делается в геометрии Евклида. Основой служила теория параллельных линий, т. к. именно здесь начинается отличие Л. г. от геометрии Евклида. Все теоремы, не зависящие от аксиомы о параллельных, общи обеим геометриям и образуют т. н. абсолютную геометрию, к которой относятся, напр., теоремы о равенстве треугольников. Вслед за теорией параллельных строились др. разделы, включая тригонометрию и начала аналитической и дифференциальной геометрий. Ниже перечислены неск. фактов Л. г., установленных самим Н. И. Лобачевским, которые отличают её от геометрии Евклида.

- 1) В Л. г. не существует подобных, но не равных треугольников; треугольники равны, если их углы равны. Поэтому существует абсолютная единица длины, т. е. отрезок, выделенный по своим свойствам, подобно тому как прямой угол выделен своими свойствами. Таким отрезком может служить, напр., сторона правильного треугольника с данной суммой углов.
- 2) Сумма углов всякого треугольника меньше  $\pi$  и может быть сколь угодно близкой к нулю. Это видно на модели Пуанкаре. Разность  $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы треугольника, пропорциональна его площади.
- 3) Через точку  $O$ , не лежащую на данной прямой  $a$ , проходит бесконечно много прямых, не пересекающих  $a$  и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние  $b$  и  $b'$ , которые называются параллельными прямой  $a$  в смысле Лобачевского. В моделях Клейна и Пуанкаре они изображаются хордами (дугами окружностей), имеющими с хордой (дугой)  $a$  общий конец (который по определению модели исключается, так что эти прямые не имеют общих точек, рис. 1, 3). Угол  $\alpha$  между прямой  $b$  (или  $b'$ ) и перпендикуляром из  $O$  на  $a$ , т. н. угол параллельности, по мере удаления точки  $O$  от прямой  $a$  убывает от  $90^\circ$  до  $0^\circ$  (в модели Пуанкаре углы в обычном смысле совпадают с углами в смысле Лобачевского, и потому на ней этот факт можно увидеть непосредственно). Параллель  $b$  с одной стороны ( $a b'$  с противоположной) асимптотически приближается к  $a$ , а с другой – бесконечно от неё удаляется (в моделях расстояние между точками, приближающимися к разным точкам граничной окружности, бесконечно растёт).
- 4) Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают др. прямой.
- 5) Линия равных расстояний от прямой есть не прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой или гиперциклом.
- 6) Предел бесконечно растущих окружностей есть не прямая, а особая кривая, называемая предельной

окружностью или орициклом.

7) Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса есть не плоскость, а особая поверхность – предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это послужило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

8) Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее, чем радиус.

9) Чем меньше область в пространстве или на плоскости Лобачевского, тем меньше метрич. соотношения в этой области отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Напр., чем меньше треугольник, тем меньше сумма его углов отличается от  $\pi$ , чем меньше окружность, тем меньше отношение её длины к радиусу отличается от  $2\pi$ , и т. п. Уменьшение области формально равносильно увеличению единицы длины, поэтому при безграничном увеличении единицы длины формулы Л. г. переходят в формулы евклидовой геометрии. Евклидова геометрия есть в этом смысле «предельный» случай геометрии Лобачевского.

## Применения геометрии Лобачевского

Лобачевский применил свою геометрию к вычислению определённых интегралов. В теории функций комплексного переменного Л. г. помогла построить теорию [автоморфных функций](#). Связь с Л. г. здесь была отправным пунктом исследований Пуанкаре, который писал, что «неевклидова геометрия есть ключ к решению всей задачи». Л. г. находит применение также в теории чисел, в её геометрич. методах, объединённых под назв. [геометрия чисел](#). Установлена связь Л. г. с кинематикой частной теории относительности. Эта связь основана на том, что равенство, выражающее закон распространения света  $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$  (где  $c$  – скорость света,  $t$  – время), при делении на  $t^2$ , т. е. для скоростей, даёт равенство  $v_x^2+v_y^2+v_z^2=c^2$ , т. е. уравнение сферы в пространстве с координатами  $v_x, v_y, v_z$  (в пространстве «скоростей»). [Лоренца преобразования](#) сохраняют эту сферу и, т. к. они линейны, переводят прямые пространства скоростей в прямые. Поэтому, согласно модели Клейна, в пространстве скоростей внутри сферы радиуса  $c$ , т. е. для скоростей, меньших скорости света (которые, согласно теории относительности, только и возможны), имеет место Л. г. Так, напр., сложение скоростей в теории относительности получает истолкование как сложение отрезков в геометрии Лобачевского.

Л. г. нашла применение в общей теории относительности. Если считать распределение масс материи во Вселенной равномерным, что в космич. масштабах представляет допустимое приближение, то оказывается, что пространство имеет геометрию Лобачевского. Т. о., оправдалось предположение Лобачевского о его геометрии как возможной теории реального пространства.

## Литература

Лит.: Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч.: В 5 т. М.; Л., 1946–1951; Каган В. Ф. Основания геометрии. М.; Л., 1949–1956. Ч. 1–2; он же. Лобачевский и его геометрия. М., 1955; Об основаниях геометрии. Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. М., 1956; Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. 2-е изд. М., 1983.