МАЖОРА́НТА И МИНОРА́НТА

МАЖОРА́НТА И МИНОРА́НТА, две функции, значения первой из которых не меньше, а второй не больше соответствующих значений данной функции (при всех рассматриваемых значениях независимой переменной). Напр., функция $f(x) = x$ для $x > -1$ является мажорантой функции $g(x) = \ln(1 + x)$, т. к. $x \geqslant \ln(1 + x)$ для всех значений $x > -1$.

Для функций, представимых степенными рядами, термину «мажоранта» часто придают более спец. смысл, понимая под мажорантой сумму степенного ряда с положительными коэффициентами, которые не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов данного ряда. Если $f_1(x)$ – мажоранта в этом смысле функции $g(x)$, то пишут $f_1(x) \gg g(x)$. Напр., $x/(1 - x) \gg \ln(1 + x)$, т. к.

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad \frac{x}{1 - x} = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

В этом смысле $f(x) = x$ уже не является мажорантой функции $\ln(1 + x)$. Мажоранты степенных рядов широко применяются в теории дифференциальных уравнений. Так, на использовании мажорант основан метод приближённого решения дифференциальных уравнений, предложенный в 1919 С. А. Чаплыгиным.

Рассматриваются также М. им. семейства функций, когда соответствующие оценки имеют место для всех функций этого семейства.

Если интегрируемые функции $f_n(x), n = 1, 2, \ldots$, имеют предел $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и существует интегрируемая мажоранта $|f_n(x)| \geqslant g(x), n = 1, 2, \ldots$, то можно переходить к пределу под знаком интеграла, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$