



# ЛАПЛА́СА ПРЕОБРАЗО́ВАНИЕ

ЛАПЛА́СА ПРЕОБРАЗО́ВАНИЕ, преобразование, переводящее функцию  $f(t)$  действительного переменного  $t, \text{ где } t \geq 0$ , называемую оригиналом, в функцию  $f(p) = L[f] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(t) e^{-pt} dt$  комплексного переменного  $p = \sigma + it$ , называемую изображением. Под Л. п. понимают не только само преобразование, но и его результат — функцию  $F(p)$ . Интеграл в правой части (1) называют интегралом Лапласа. Он был рассмотрен П. [Лапласом](#) в ряде работ, которые объединены в его книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Ранее такие интегралы применял к решению дифференциальных уравнений Л. [Эйлер](#) (1737).

При некоторых условиях по Л. п. можно однозначно восстановить функцию  $f(t)$ , в простейших случаях — по формуле обращения  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{-i \infty}^{i \infty} F(p) e^{pt} dp$ .

Л. п. является линейным функциональным преобразованием. К осн. свойствам Л. п. относятся равенства  $L[f'] = pF(p) - f(0)$ ,  $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $L \left[ \int_0^t f(u) du \right] = \frac{F(p)}{p}$ ,  $t > 0$ .

Л. п. в сочетании с формулой обращения (2) применяется при решении дифференциальных уравнений. Так, в силу линейности отображения (1) и свойства (3) Л. п. решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяет алгебраич. уравнению первого порядка и может быть легко найдено. Напр., если дано уравнение  $y'' + y = f(t)$  с начальными условиями  $y(0) = y'(0) = 0$  и  $Y(p) = L[y]$ ,  $F(p) = L[f]$ , то  $L[y''] = p^2 Y(p)$  и  $p^2 Y(p) + Y(p) = F(p)$ , что приводит к равенству  $Y(p) = F(p)/(p^2 + 1)$ .

Совр. общая теория Л. п. строится на основе интегрирования по Лебегу. Для применимости Л. п. к функции  $f(t)$  необходимо, чтобы  $f(t)$  была интегрируема по Лебегу на любом конечном интервале  $(0, t)$ ,  $t > 0$ , и интеграл (1) сходилсся хотя бы в одной точке  $p_0 = \sigma_0 + it_0$ . Если интеграл (1) сходится в точке  $p_0$ , то он сходится во всех точках  $p$ , для которых  $\text{Re } p > \text{Re } p_0$ . Если интеграл (1) сходится хотя бы в одной точке плоскости  $p_0$ , то либо он сходится во всей плоскости, либо существует такое число  $\sigma_c$ , что при  $\text{Re } p > \sigma_c$  интеграл (1) сходится, а при  $\text{Re } p < \sigma_c$  расходится. Число  $\sigma_c$  называется абсциссой сходимости интеграла Лапласа,  $F(p)$  является аналитич. функцией в полуплоскости  $\text{Re } p > \sigma_c$ .

С использованием Л. п. решаются мн. задачи электротехники, гидродинамики, механики, теплопроводности. Л. п. нашло широкое применение в [операционном исчислении](#).

## Литература

Лит.: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., 1965.