



КРАТНЫЙ РЯД

Авторы: С. А. Теляковский

КРАТНЫЙ РЯД, формально записанная сумма

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_m=1}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_m}$$

бесконечного набора слагаемых, зависящих от m индексов,

$m \geq 2$. Слагаемые называются членами ряда, они могут быть числами, функциями и др. объектами.

Характерные особенности К. р. по сравнению с обычными рядами (одномерными, при $m = 1$) видны на примере двойных числовых рядов, когда $m = 2$.

Как и для обычных рядов (см. [Ряд](#)), сходимость двойного ряда понимается как сходимость его частичных сумм и суммой ряда называется предел частичных сумм, если он существует, при этом для двойных рядов нет единого определения частичных сумм. В разных случаях естественными оказываются разл. определения частичных сумм. Наиболее часто рассматривают частичные суммы вида

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M a_{i,j}$$

и двойной ряд называют сходящимся по прямоугольникам (или по Прингсхейму) к числу S , если суммы

$S_{N,M}$ стремятся к

S , когда

N и

M неограниченно возрастают независимо друг от друга. Если существуют положительные постоянные

C_1 и

C_2 такие, что

$S_{N,M} \rightarrow S$ при

$N, M \rightarrow \infty$ так, что выполняются неравенства

$$C_1 \leq \frac{N}{M} \leq C_2$$

то говорят о сходимости по прямоугольникам с ограниченным отношением. Если

$S_{N,N} \rightarrow S$ при

$N \rightarrow \infty$, то говорят о сходимости по квадратам. Если берутся частичные суммы

$$\sum_{i^2+j^2\leqslant N^2}a_{i,j}$$

и

$$S_N\rightarrow S \text{ при}$$

$N\rightarrow\infty$, то говорят о сходимости по кругам.

Мн. свойства К. р. существенно отличаются от свойств одномерных рядов. Напр., члены сходящихся по Прингсхейму рядов не обязательно ограничены.

Для представления функций двух переменных

$f(x,y)$ используются двойные степенные ряды

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_{i,j}x^iy^j.$$

Литература

Лит.: Никольский С. М. Курс математического анализа. М., 1990. Т. 1; Воробьев Н. Н. Теория рядов. 6-е изд. СПб., 2002.