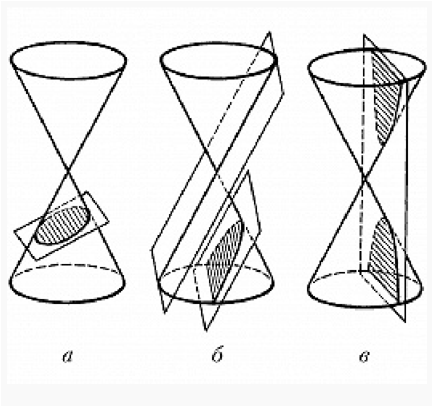
КОНИ́ЧЕСКИЕ СЕЧЕ́НИЯ



КОНИ́ЧЕСКИЕ СЕЧЕ́НИЯ, линии, которые получаются сечением прямого кругового *конуса* плоскостями, не проходящими через его вершину. Существуют К. с. трёх типов. 1) Секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости (рис., а); линия пересечения есть замкнутая овальная кривая – *эллипс*; окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса. 2) Секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса (рис., б); в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая – *парабола*, целиком лежащая на одной полости. 3) Секущая плоскость пересекает обе полости конуса (рис., в); линия пересечения – *гипербола* – состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), каждая из которых лежит на своей полости конуса.

В *аналитической геометрии* К. с. – действительные, нераспадающиеся *линии второго порядка*. В тех случаях, когда К. с. имеет центр симметрии (центр), т. е. является эллипсом или гиперболой, его уравнение в декартовой системе координат может быть приведено (путём перенесения начала координат в центр) к виду $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{33}$, где a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{33} – постоянные. Уравнения этих кривых могут быть приведены к более простому виду $Ax^2+By^2=C, \qquad (*)$ если за направления осей координат выбрать т. н. главные направления – направления главных осей (осей симметрии) К. с. Если постоянные A и B имеют одинаковые знаки (совпадающие со знаком C), то уравнение $(*)$ определяет эллипс; если A и B разного знака, то – гиперболу.

Уравнение параболы привести к виду $(*)$ нельзя. При надлежащем выборе осей координат (одна ось координат – единственная ось симметрии параболы, другая – перпендикулярная к ней прямая, проходящая через вершину параболы) её уравнение можно привести к виду $y^2=2px$.

К. с. были известны математикам Древней Греции. То, что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конусов, открыто Менехмом (ок. 340 до н. э.). Наиболее полное сочинение, посвящённое этим кривым, – «Конические сечения» *Аполлония* Пергского (ок. 200 до н. э.). Дальнейшее развитие теории К. с. связано с созданием в 17 в. проективного (Ж. *Дезарг*, Б. *Паскаль*) и координатного (Р. *Декарт*, П. *Ферма*) методов. При надлежащем выборе системы координат (ось абсцисс – ось симметрии К. с., ось ординат – касательная к вершине К. с.) уравнение К. с. приводится к виду $y^2=2px+\lambda x^2$, где p и λ – постоянные, $p\neq 0$. При $\lambda=0$ это уравнение задаёт параболу, при $\lambda < 0$ – эллипс, при $\lambda > 0$ – гиперболу. Это свойство К. с., содержащееся в последнем уравнении, было известно др.-греч. геометрам и послужило для Аполлония Пергского поводом присвоить отд. типам К. с. названия, сохранившиеся до сих пор: слово «парабола» означает приложение (т. к. в греч. геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ называется приложением данного прямоугольника к этому основанию);

слово «эллипс» – недостаток (приложение с недостатком); слово «гипербола» – избыток (приложение с избытком).

Стереометрич. определение К. с. можно заменить планиметрич. определениями этих кривых как множеств точек на плоскости. Так, напр., эллипс является множеством точек, для которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) имеет одно и то же значение. Можно дать и др. планиметрич. определение К. с., охватывающее все три типа этих кривых: К. с. – множество точек, для каждой из которых отношение расстояний до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) равно данному положительному числу (эксцентриситету) e. При $e \lt 1$ К. с. – эллипс; при $e \gt 1$ – гипербола; при $e=1$ – парабола.

Интерес к К. с. всегда поддерживался тем, что эти линии часто встречаются в описаниях разл. явлений природы и в человеческой деятельности. К. с. приобрели особое значение после того, как И. *Кеплер* (1609) установил с помощью наблюдений, а И. *Ньютон* (1687) теоретически обосновал законы движения планет (один из которых утверждает, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по К. с., в одном из фокусов которого находится Солнце).

Литература

Лит.: Варден Б. Л. ван дер. Пробуждающаяся наука. 2-е изд. М., 2006; Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. 2-е изд. М., 2008.