



# КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ИСЧИСЛЕНИЕ

Авторы: А. М. Зубков

**КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ИСЧИСЛЕНИЕ**, раздел математики, в котором изучаются связи между функциями и разностями их значений (или линейными комбинациями таких значений) в заранее выбранных точках. Прямой разностью 1-го порядка с шагом  $h$  функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется величина

$$\Delta_h^1[f](x) = f(x+h) - f(x),$$

обратной разностью – величина

$$\nabla_h^1[f](x) = f(x) - f(x-h),$$

центральной разностью – величина

$$\delta_h^1[f](x) = f(x+h/2) - f(x-h/2).$$

Прямые разности более высоких порядков определяются индуктивно по формулами

$$\Delta_h^{n+1}[f](x) = \Delta_h^1[\Delta_h^n[f]](x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

аналогично для других разностей. Справедливы равенства

$$\Delta_h^n[f](x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x + (n-j)h), \quad \delta_h^n[f](x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(x + (n/2 - j)h).$$

Для дифференцируемых функций с помощью конечных разностей  $n$ -го порядка при малых значениях  $h$  можно получить приближения производных  $n$ -го порядка. Точность приближения производных функции  $f$  её конечными

разностями при  $h \rightarrow 0$  зависит как от свойств функции  $f$ , так и от вида разности, напр.:  $f'(x) = \left\{ \frac{1}{h} \Delta_h^1[f](x) - \frac{1}{2} h f'' \right.$

При численном решении дифференциальных уравнений входящие в эти уравнения производные заменяют конечными разностями, что приводит к системе рекуррентных уравнений (см. [Рекуррентные соотношения](#)) относительно значений искомой функции в точках, образующих некоторую арифметич. прогрессию. Точность такого метода зависит от точности приближения производных с помощью конечных разностей.

Если разности строятся по значениям функции  $f$  в произвольных узлах  $\{x_k\}$ , то используются разделённые разности  $\Delta_{[x_i, x_j]}[f] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$ ,  $\Delta_{[x_1, \dots, x_{k+1}]}[f] = \frac{\Delta_{[x_2, \dots, x_{k+1}]}[f] - \Delta_{[x_1, \dots, x_k]}[f]}{x_{k+1} - x_1}$ ,  $\Delta_{[x_1, \dots, x_k]}[f] = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{x_j - x_k} \prod_{i \neq j} \frac{x_j - x_i}{x_i - x_k}$ , из которой следует, что значение разделённой разности не зависит от порядка аргументов  $x_1, \dots, x_k$ . В терминах разделённых разностей просто записывается формула Ньютона для интерполяционного многочлена  $P_n(x)$ , т. е. для многочлена, который совпадает с функцией  $f(x)$  в точках  $x_1, \dots, x_n$ :  $P_n(x) = f(x_1) + \sum_{k=2}^n \Delta_{[x_1, \dots, x_k]}[f]$

$$[f]\prod_{j=1}^{k-1}(x-x_j).$$

Одним из разделов К. р. и. является теория уравнений в конечных разностях, в которой изучаются, в частности, методы решения уравнений вида  $F(x, f(x), \Delta_h^1[f](x), \ldots, \Delta_h^n[f](x)) = 0$ , где  $F$  – заданная, а  $f$  – искомая функция. Эта теория во многом аналогична теории дифференциальных уравнений. Наиболее разработаны случаи, когда функция  $F$  линейна по всем аргументам или по всем аргументам, кроме первого.

## Литература

Лит.: Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. 4-е изд. М., 2006; Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 6-е изд. М., 2008.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/GeneralPunctuation.js