КОЛЕ́Ц ТЕО́РИЯ

КОЛЕ́Ц ТЕО́РИЯ, раздел алгебры, изучающий кольца, т. е. непустые множества R, для элементов которых определены две бинарные операции – сложение и умножение (обозначаемые + и · соответственно; знак · обычно опускается), причём предполагается, что для любых элементов $a, b, c \in R$ выполняются следующие аксиомы:

$a+b=b+a$ (коммутативность сложения);

$a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность сложения);

уравнение $a+x=b$ имеет решение $x=b-a \in R$ (обратимость сложения, т. е. возможность вычитания);

$a(b+c)=ab+ac$ и $(b+c)a=ba+ca$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

Элементы кольца образуют абелеву группу (см. *Групп теория*) относительно сложения; она называется аддитивной группой кольца. Относительно умножения нуль 0 этой группы является «поглощающим» элементом, т. е. $a \cdot 0=0 \cdot a=0$ для любого элемента a кольца. Кольцо, вообще говоря, может содержать и т. н. делители нуля, т. е. такие ненулевые элементы a и b, произведение которых равно 0. Единицей называется такой элемент 1 кольца R, что $a \cdot 1=1 \cdot a$ для всех $a \in R$. Кольцо не обязано обладать единицей, но если она есть, то она единственна.

Примеры колец. 1. Множество всех целых чисел. 2. Множество всех чётных чисел и вообще всех целых чисел, кратных данному числу m. 3. Множество всех рациональных чисел. 4. Множество всех действительных чисел. 5. Множество всех комплексных чисел. 6. Множество всех гауссовых чисел, т. е. комплексных чисел $a+ib$ с целыми a и b. 7. Множество всех многочленов от одного или нескольких переменных с рациональными, действительными или комплексными коэффициентами. 8. Множество всех функций, непрерывных на данном отрезке числовой прямой. 9. Множество всех квадратных матриц порядка n с действительными (или комплексными) элементами. 10. Множество всех *кватернионов*. 11. Множество всех симметрич. матриц порядка n с действительными элементами относительно сложения матриц и йорданова умножения $a \circ b=(ab+ba)/2$, где в правой части стоят обычные произведения матриц. 12. Множество всех векторов 3-мерного пространства относительно обычного сложения и векторного умножения.

Во многих случаях на умножение в кольце накладывают дополнит. ограничения. Так, если $a(bc)=(ab)c$, то кольцо называется ассоциативным (примеры 1–10); если в кольце выполняются равенства $(aa)b=a(ab),\ (ab)b=a(bb)$, то оно называется альтернативным (пример 1); если в кольце выполняются равенства $ab=ba$ и $(ab)(aa)=(aa)ba$, то оно называется йордановым кольцом (пример 12); если в кольце выполняются равенства $a^2=0$, $a(bc)+b(ca)+c(ab)=0$, то оно называется кольцом Ли (пример 13); если $ab=ba$, то кольцо называется коммутативным (примеры 1–8, 12). Ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля называется областью целостности (примеры 1–7). Ассоциативное кольцо, в котором при $a \neq 0$ разрешимы оба уравнения $ax=b$ и $xa=b$, называется телом (примеры 3–5, 10); тело обладает единицей и не имеет делителей нуля. Коммутативное тело называется полем. Множество всех ненулевых элементов тела (поля) относительно умножения образует группу (абелеву группу), называемую мультипликативной группой тела (поля).

Для мн. разделов алгебры важны кольца многочленов над произвольным полем и кольца матриц над телами, определяемые аналогично кольцам примеров 7 и 9. Мн. классы колец находят применение и вне алгебры. Важнейшими из них являются кольцо функций и кольцо операторов, использующиеся в функциональном анализе.

Пусть Φ – произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. Кольцо A (не обязательно ассоциативное) называется алгеброй над Φ или операторным кольцом с кольцом операторов Φ, если определено произведение любого элемента из Φ на элемент из A, лежащее в A, причём так, что для всех $\alpha, \beta \in \Phi,\ a, b \in A$ справедливы соотношения:

$$(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a, \quad \alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b,$$

$$\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a, \quad 1a=a, \quad \alpha(ab)=(\alpha a)b.$$

Если кольцо Φ коммутативно, то принято последнее условие заменять более сильным условием

$$\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b).$$

Любое кольцо можно считать алгеброй над кольцом целых чисел, если понимать произведение na, где n – целое число, как сумму $a+a+...+a$, в которой элемент a встречается n раз. Поэтому кольца можно рассматривать как частный случай алгебр.

Если A – алгебра над полем (называемая также линейной алгеброй), то, по определению, A является векторным пространством над этим полем, а значит, имеет *базис*. Это даёт возможность строить алгебры над полем по базису, для чего достаточно задать таблицу умножения базисных элементов. Алгебра над полем называется конечномерной, если она конечномерна как векторное пространство. Размерность этого векторного пространства называется также рангом алгебры. Напр., поле **\mathbfC** комплексных чисел есть алгебра ранга 2 над полем \mathbf R действительных чисел, кватернионы образуют алгебру ранга 4 над полем **\mathbf R**, полное кольцо матриц порядка n с элементами из поля Φ – алгебра ранга n^2 над Φ.

В К. т. важную роль играют понятия гомоморфизма и изоморфизма. Мн. рассуждения и описания проводятся «с точностью до изоморфизма», т. е. изоморфные кольца и алгебры не различаются. Гомоморфизм – это такое отображение φ кольца R в кольцо R', что для любых $a,\ b \in R$

$$(a+b)\varphi=a\varphi+b\varphi, \quad (ab)\varphi=(a\varphi)(b\varphi),$$

т. е. φ перестановочно с кольцевыми операциями. Для алгебр (над одним и тем же полем Φ) требуют также, чтобы для любого $\alpha \in \Phi$ выполнялось равенство $(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi)$. Если при этом φ – биективное отображение (т. е. взаимно однозначное отображение на R'), то оно называется изоморфизмом, а кольца (алгебры) R и R' – изоморфными.

Множество M элементов кольца (алгебры) A называется подкольцом (подалгеброй), если M само является кольцом (алгеброй) относительно операций, определённых в A; множество M называется левым (правым или двусторонним) идеалом, если, помимо этого условия, для любых элементов $m\in M$ и $a\in A$ произведение am

(соответственно ma или как am, так и ma) лежит в M. Элементы $a, b \in A$ называются сравнимыми по идеалу M, если $b-a\in M$. Всё кольцо (алгебра) A разбивается на классы сравнимых элементов – классы вычетов по идеалу. Т. о., всякий идеал определяет на множестве A отношение эквивалентности, и можно определить сложение и умножение (умножение на элемент поля) классов вычетов по двустороннему идеалу M через сложение и умножение элементов этих классов. Относительно этих операций классы вычетов образуют кольцо (алгебру), называемое факторкольцом (факторалгеброй) A/M. Имеет место теорема о гомоморфизмах: если каждому элементу из A поставить в соответствие содержащий его класс, то получается гомоморфизм A на A/M; обратно, если A гомоморфно отображается на A', то множество M элементов из A, отображающихся в нуль кольца (алгебры) A', будет двусторонним идеалом в A и A/M изоморфно A'. Кольцо без двусторонних идеалов называется простым.

Переход от алгебры к её подалгебрам и факторалгебрам является одним из способов получения новых алгебр. Напр., из алгебры многочленов от достаточно большого числа переменных над полем Φ (в качестве гомоморфного образа) может быть получена любая ассоциативно-коммутативная алгебра над полем Φ.

Исторический очерк

Примерно до сер. 19 в. были известны лишь отд. примеры колец: числовые кольца, т. е. подкольца поля комплексных чисел и кольца вычетов целых чисел. Первые примеры некоммутативных колец и алгебр встречаются в 1843–44 в работах У. *Гамильтона* и Г. *Грассмана*. Самый известный из этих примеров – тело кватернионов. После 1870 начинается общее исследование гиперкомплексных систем (в совр. терминологии – конечномерных алгебр над полем R действит. чисел). В работах Р. *Дедекинда* встречается общее понятие ассоциативного кольца, тела и алгебры над полем (кольцо у него называлось порядком). Термин «кольцо» был введён Д. *Гильбертом* позднее. К. *Вейерштрасс* и Дедекинд доказали, что любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов, т. е. без таких элементов a, для которых $a^n=0$ для некоторого натурального n, является прямой суммой полей, изоморфных либо полю $\mathbf R$, либо полю $\mathbf C$. При этом прямой суммой, или прямым произведением конечного числа алгебр $A_1,...,A_n$, называется множество наборов $(a_1,...,a_n)$, $a_1 \in A_1,...,a_n \in A_n$ с покомпонентными операциями сложения и умножения. Ф. *Фробениус* (1878) доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над $\mathbf R$ – тело кватернионов.

К нач. 20 в. была достаточно развита теория гомоморфизмов и выяснена их связь с идеалами. В 1920–30-х гг. стали изучаться произвольные ассоциативные кольца. При этом большую роль начали играть левые и правые идеалы кольца и условия максимальности и минимальности, накладываемые на них. Другим важнейшим условием является условие простоты (отсутствие нетривиальных двусторонних идеалов). Любая конечномерная простая алгебра над полем изоморфна алгебре всех матриц какого-то порядка с коэффициентами из некоторого тела, содержащего это поле (теорема амер. алгебраиста Дж. Г. М. Веддерберна, 1907). В 1940-х гг. развивалась также теория неассоциативных колец и бесконечномерных неассоциативных линейных алгебр. Центр. часть этой теории – изучение т. н. алгебр, близких к ассоциативным (альтернативных, алгебр Ли, йордановых алгебр и некоторых их обобщений). Теория ассоциативно-коммутативных колец составляет особый большой раздел алгебры, развивающийся в непосредственном контакте с алгебраич. теорией чисел и алгебраич. геометрией, – *коммутативную алгебру*.

Литература

Лит.: Бурбаки Н. Алгебра. М., 1966. [4.3.]: Модули, кольца, формы; Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. 3-е изд. СПб., 2004; Ламбек И. Кольца и модули. М., 2005; Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. СПб. [и др.], 2007.