



ИСЧЕРПЫВАНИЯ МЁТОД

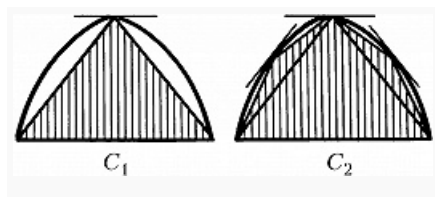
Авторы: А. Н. Колмогоров

ИСЧЕРПЫВАНИЯ МЁТОД, метод доказательства, применявшийся математиками древности при определении площадей и объёмов.

Одна из типичных схем доказательств при помощи И. м. может быть изложена в совр. обозначениях следующим образом. Для определения значения неизвестной величины A можно построить некоторую последовательность величин $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ такую, что $C_n < A \iff (1)$ для всех n , и указать величину B такую, что $C_n < B \iff (2)$ для всех n . При этом последовательность $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ и величина B должны быть такими, что справедливы неравенства $K(A - C_n) < D \iff (3)$ $K(B - C_n) < D \iff (4)$ при любом целом K для достаточно больших n , где D – постоянная величина. В этом случае $A = B$.

С совр. точки зрения для перехода от неравенств (3) и (4) к равенству $A = B$ достаточно заметить, что в силу условий (1) – (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (A - C_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (B - C_n) = 0$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = B$.

Математики древности, не располагавшие теорией [пределов](#), обращались к доказательству от противного и доказывали невозможность каждого из неравенств $A < B$, $B < A$. Чтобы опровергнуть первое из них, при помощи аксиомы Евдокса – Архимеда (она состоит в том, что для любых положительных величин a и b таких, что $a < b$, существует целое число m такое, что $ma > b$) устанавливали, что для $R = B - A$ существует такое K , что $KR > D$, и в силу условия (1) получали неравенства $K(B - C_n) > K(B - A) > D$, что противоречит (4). Аналогично опровергалось др. предположение и оставалось только принять равенство $A = B$.



Введение И. м. вместе с лежащей в его основе аксиомой приписывается [Евдоксу Книдскому](#). Этим методом широко пользовался [Евклид](#), и с особым искусством и разнообразием – [Архимед](#). Напр., для определения площади сегмента, заключённого между параболой и пересекающей её прямой (рис.), Архимед строил площади C_1, C_2, \dots ,

C_n, \dots , «исчерпывающие» при их постепенном нарастании эту площадь. При этом $C_2 = C_1 + \frac{1}{4}C_1$, $C_3 = C_1 + \frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{16}C_1$, $C_n = C_1 + \frac{1}{4}C_1 + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}C_1$. Вместо того чтобы прибегнуть к предельному переходу $A = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right)C_1 = \frac{4}{3}C_1$, Архимед с помощью геометрич. соображений доказал, что при любом n справедливо неравенство $A - C_n < C_1 / 4^{n-1}$, для величины $B = 4C_1/3$ установил, что $B - C_n = \frac{1}{3} \cdot 4^{n-1} C_1$, и, следуя изложенному выше, доказал, что $A = B = 4C_1/3$.