



# ИНВАРИАНТОВ ТЕОРИЯ

Авторы: В. Л. Попов

ИНВАРИАНТОВ ТЕОРИЯ, алгебраич. теория, изучающая многочлены или, более общо, рациональные функции, не изменяющиеся (или изменяющиеся определённым образом) при невырожденных линейных заменах переменных. При этом, вообще говоря, рассматриваются не все такие замены, а некоторая их группа, указанные многочлены (более общо, рациональные функции) называются инвариантами этой группы.

Напр., т. н. бинарная форма 2-й степени  $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$  от переменных  $x$  и  $y$  с буквенными коэффициентами  $a, b, c$  при замене  $x$  на  $\alpha x + \beta y$ ,  $y$  на  $\gamma x + \delta y$ , где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — числа, преобразуется в бинарную форму  $\tilde{a}x^2 + 2\tilde{b}xy + \tilde{c}y^2$ , где  $\tilde{a} = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ ,  $\tilde{b} = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$ ,  $\tilde{c} = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2$ .

Если указанная замена переменных унимодулярна, т. е.  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , то справедливо равенство  $a\tilde{c} - \tilde{b}^2 = a\tilde{c} - \tilde{b}^2$ . В этом случае говорят, что многочлен  $a\tilde{c} - \tilde{b}^2$  от коэффициентов бинарной формы  $f$  (дискриминант) является её унимодулярным инвариантом. Для любой указанной невырожденной замены переменных, т. е. такой, что  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , из (1) следует равенство  $(a\tilde{c} - \tilde{b}^2)/(a + c)^2 = (\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2)/(\tilde{a} + \tilde{c})^2$ . В этом случае говорят, что рациональная функция  $(a\tilde{c} - \tilde{b}^2)/(a + c)^2$  от коэффициентов бинарной формы  $f$  является её абсолютным инвариантом. Аналогично определяются инварианты форм любых степеней от любого числа переменных и, более общо, инварианты конечной системы таких форм. Напр., многочлен  $3b^2c^2 + 6abcd + 4ac^3 - a^2d^2$  — унимодулярный инвариант бинарной формы 3-й степени  $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$  от переменных  $x$  и  $y$ , а  $ad - bc$  — унимодулярный инвариант системы из двух бинарных форм 1-й степени  $ax + by$  и  $cx + dy$ .

И. т. возникла под влиянием ряда задач теории чисел, алгебры и геометрии. К. Гаусс поставил задачу изучения многочленов от коэффициентов бинарной формы  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , не меняющихся при преобразованиях этих коэффициентов, определяемых унимодулярными заменами переменных при целых  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ . В проективной геометрии появляются алгебраич. выражения от проективных координат, не меняющиеся при проективных преобразованиях, напр. *двойное отношение* упорядоченного набора четырёх точек проективной прямой. Арифметич. и алгебраич. вопросами, так или иначе связанными с И. т., занимались К. Якоби, нем. математик Ф. Эйзенштейн, Ш. Эрмит. Как математич. дисциплина И. т. сложилась к сер. 19 в. К этому времени понятия группы, инварианта и осн. задачи И. т. были строго сформулированы и стало ясно, что мн. факты классич. и проективной геометрий суть выражение тождеств (сизигий) между инвариантами соответствующей группы преобразований. Первой работой по И. т. является, по-видимому, «Мемуар о гипердетерминантах» А. Кэли (1846). Все классич. термины И. т. — инвариант, ковариант, дискриминант, сизигия и т. д. — были введены Дж. Сильвестром.

В 19 в. осн. объектом изучения И. т. были унимодулярные инварианты форм и осн. задача И. т. состояла в описании всех инвариантов. С этой целью были разработаны разл. формальные процедуры, создан т. н.

символический метод – формальный способ вычислять все инварианты степени не выше заданной. В процессе развития классической И. т. гл. усилия исследователей стали сосредотачиваться вокруг решения двух осн. проблем.

Первая из них формулируется следующим образом. Рассматриваются унимодулярные инварианты некоторой системы форм. Требуется доказать существование такой конечной системы  $F_1, \dots, F_d$  этих инвариантов, что любой инвариант  $F$  выражается через  $F_1, \dots, F_d$  с помощью операции сложения и умножения, т. е. представляется в виде многочлена от  $F_1, \dots, F_d$ . Вообще говоря,  $F_1, \dots, F_d$  не независимы: могут существовать ненулевые многочлены  $P$  от переменных  $t_1, \dots, t_d$ , называемые сизигиями, которые после подстановки  $t_i = F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , тождественно обращаются в нуль.

Вторая осн. проблема состоит в доказательстве существования конечного набора т. н. базисных сизигий, алгебраич. следствиями которых являются все остальные. Обе осн. проблемы были положительно решены Д. [Гильбертом](#), 1-я в 1890, а 2-я в 1893. Его доказательства основывались на общих абстрактных алгебраич. утверждениях, составивших позднее фундамент совр. [коммутативной алгебры](#). Подход Гильберта не даёт принципиального способа найти  $F_1, \dots, F_d$ . Конструктивное доказательство было найдено рос. математиком В. Л. Поповым (1981).

Развившаяся к 1930-м гг. теория групп Ли и их представлений привела к следующей геометрич. переформулировке задач И. т. Задано линейное действие группы  $G$  в конечномерном линейном пространстве  $V$ . Инварианты этого действия – многочлены на  $V$ , постоянные на орбитах группы  $G$ , и цель И. т. – их описание. В 1930-х гг. Г. [Вейль](#) распространил решение Гильберта 1-й осн. проблемы на случай, когда  $G$  – компактная группа Ли или комплексная полупростая группа Ли (на эти случаи обобщается и результат Гильберта по 2-й осн. проблеме). Вместе с тем япон. математик М. Нагата (1958) нашёл пример, для которого 1-я осн. проблема решается отрицательно. Это дало решение т. н. 14-й проблемы Гильберта.

Новый этап развития И. т. связан с расширением круга задач и геометрич. приложений. Совр. И. т. стала частью общей теории алгебраич. групп преобразований, в которой исследуются разнообразные аспекты действий алгебраич. групп на алгебраич. многообразиях. Фундаментом этих исследований является теория алгебраич. групп и их представлений, построенная в 1950-х гг., а языком – язык алгебраич. геометрии.

Понятие [инварианта](#) в И. т. – частный случай общематематич. понятия инварианта. Под последним понимается любое отображение  $\varphi$  рассматриваемой совокупности  $M$  математич. объектов, снабжённой некоторым отношением эквивалентности  $\rho$ , в др. совокупность  $N$  математич. объектов, постоянное на классах эквивалентности  $M$  по  $\rho$ .

В случае когда классы эквивалентности отношения  $\rho$  являются орбитами некоторой группы  $G$ , действующей на  $M$ , инварианты  $\rho$  называют инвариантами группы преобразований  $G$ . Такие инварианты лежат в основе систематизации геометрич. дисциплин по группам преобразований. Эта концепция была выдвинута Ф. [Клейном](#) в т. н. эрлангенской программе. Согласно этой концепции, всякая группа преобразований может служить группой преобразований систем координат в некоторой геометрии; величины, определяемые объектами этой геометрии и не меняющиеся при смене координат (инварианты), описывают внутренние свойства рассматриваемой геометрии и дают структурную классификацию её теорем. Так, напр., задача проективной геометрии – нахождение инвариантов (и соотношений между ними) для проективной группы, евклидовой геометрии – для

группы движений евклидова пространства, и т. д.

Общее понятие инварианта, однако, является более широким и не может быть ограничено рамками инвариантов групп преобразований. Примеры можно указать во многих областях математики. Так, кривизна поверхности, определяемая в дифференциальной геометрии, является инвариантом изгиба.

## Литература

Лит.: Hilbert D. Über die Theorie der algebraischen Formen // Mathematische Annalen. 1890. Bd 36. S. 473–531; idem. Über die vollen Invariantensysteme // Ibid. 1893. Bd 42. S. 313–373; Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М., 1947; Nagata M. On the fourteenth problem of Hilbert // Proceedings of the International congress of mathematicians (Edinburgh, 1958). Camb., 1960; Popov V. L. Constructive invariant theory // Astérisque. 1981. Vol. 87/88. P. 303–334; Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1989. Т. 55; Mumford D., Fogarty J., Kirwan F. Geometric invariant theory. 3rd ed. B.; N. Y., 1994; Derksen H., Kemper G. Computational invariant theory. B. a. o., 2002.

Processing math: 0%