



ИНВАРИАНТ

Авторы: В. Л. Попов

ИНВАРИАНТ (от лат. *invarians*, род. п. *invariantis* – неизменяющийся), отображение φ совокупности объектов M , на которой задано отношение эквивалентности ρ , в другую совокупность N , постоянное на каждом из классов эквивалентности M по ρ (точнее, φ – И. отношения эквивалентности ρ на M). Если X – объект из M , то говорят, что $\varphi(X)$ – И. объекта X . Понятие И. является одним из важнейших в математике, поскольку оно связано с задачами классификации объектов того или иного типа. По существу, цель всякой математич. классификации – построение некоторой полной системы И. (по возможности наиболее простой), т. е. такой системы, которая разделяет любые два неэквивалентных объекта из рассматриваемой совокупности. Термин «И.» ввёл Дж. *Сильвестр* (1851).

Простейшими примерами И. являются т. н. И. нераспадающихся кривых 2-го порядка на евклидовой плоскости.

Пусть M – множество всех таких кривых, а ρ – отношение эквивалентности на M , определённое правилом:

$\Gamma \in M$ эквивалентна $\Gamma' \in M$ тогда и только тогда, когда Γ' получается из Γ движением (т. е. изометрией) плоскости. Если $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$

– уравнение кривой $\Gamma \in M$ в к.-л. декартовой системе координат, то числа $\sigma(\Gamma)\Delta(\Gamma)^{-1/3}$, и, $\sigma(\Gamma)\Delta(\Gamma)^{-2/3}$, где $\sigma(\Gamma) = A + C$, $\Delta(\Gamma) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, $\Delta(\Gamma) = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$,

не зависят от выбора системы координат (хотя само уравнение линии Γ – зависит) и кривые $\Gamma, \Gamma' \in M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\sigma(\Gamma)\Delta(\Gamma)^{-1/3} = \sigma(\Gamma')\Delta(\Gamma')^{-1/3}$ $\delta(\Gamma)\Delta(\Gamma)^{-2/3} = \delta(\Gamma')\Delta(\Gamma')^{-2/3}$.

Иначе говоря, отображения $\sigma\Delta^{-1/3}$ и $\delta\Delta^{-2/3}$ множества M в множество N всех действит. чисел являются И. отношения эквивалентности ρ (и, более того, образуют полную систему И.); эти отображения и называют И. нераспадающихся плоских кривых 2-го порядка. Значения этих И. на конкретной линии позволяют определить тип этой кривой (эллипс, гипербола, парабола).

Другой классич. пример – *двойное отношение* упорядоченного набора четырёх разл. точек, лежащих на одной прямой в действительном проективном пространстве. Двойное отношение не изменится, если подвергнуть эти точки проективному преобразованию всего пространства. В этом примере M – множество упорядоченных четвёрок точек проективного пространства, лежащих на одной прямой; отношение эквивалентности ρ на M определяется по правилу: наборы $F, F' \in M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда F переводится в F' проективным преобразованием пространства. Взятие двойного отношения определяет изображение M в множество действительных чисел N . Это отображение является И. отношения ρ (и, более того, образует полную систему И.); именно в этом смысле говорят, что двойное отношение – И. четырёх точек (относительно

проективной группы). См. также [Инвариантов теория](#).

Processing math: 0%