



ДИСКРЕТНАЯ ПОДГРУППА

Авторы: Э. Б. Винберг

ДИСКРЕТНАЯ ПОДГРУППА, подгруппа Γ группы Ли G (или, более общо, топологич. группы), являющаяся дискретным подмножеством (см. *Групп теория*, *Ли групп теория*). Дискретность означает, что в каждом ограниченном подмножестве группы G содержится лишь конечное число элементов подгруппы Γ . Примерами Д. п. являются подгруппа \mathbf{Z}^n целочисленных векторов n -мерного пространства \mathbf{R}^n и подгруппа $SL_n(\mathbf{Z})$ целочисленных матриц в группе $SL_n(\mathbf{R})$ вещественных матриц порядка n с определителем 1.

До сер. 20 в. рассматривались отдельные классы Д. п., обязанные своим происхождением арифметике, теории функций и кристаллографии. Исследование группы $SL_n(\mathbf{Z})$ составило предмет т. н. теории приведений, разработанной рос. математиками А. Н. Коркиным и Е. И. *Золотарёвым*, а также Ш. *Эрмитом*, Г. *Минковским* и др. во 2-й пол. 19 – нач. 20 вв. Ряд Д. п. классич. групп Ли исследовал в начале 1940-х гг. К. *Зигель*. В теории функций комплексного переменного решение дифференциальных уравнений с алгебраич. коэффициентами привело к рассмотрению некоторых спец. функций (названных впоследствии автоморфными), инвариантных относительно различных Д. п. группы $SL_2(\mathbf{R})$. Обширный класс таких групп, в т. ч. группа $SL_2(\mathbf{Z})$, был в этой связи изучен Ф. *Клейном*. Почти одновременно, в 1881–82, А. *Пуанкаре* дал геометрич. описание всех таких групп.

В кристаллографии Е. С. *Фёдоровым* в кон. 19 в. рассматривались группы симметрии кристаллич. структур, являющиеся Д. п. группы движений трёхмерного евклидова пространства. Эти и подобные им группы движений n -мерного евклидова пространства были изучены с алгебраич. точки зрения нем. математиком Л. Бибербахом в 1911. Он, в частности, доказал, что всякая такая группа содержит группу, изоморфную \mathbf{Z}^n и состоящую из параллельных переносов. Все эти исследования послужили исходным материалом для создания общей теории Д. п. групп Ли в 1950–70-е гг. Большой вклад в исследование Д. п. внесли А. И. *Мальцев*, амер. математик А. Борель, инд. математик Хариш-Чандра, амер. математик рос. происхождения Г. А. Маргулис. Исследование Д. п. в группе движений трёхмерного пространства Лобачевского приобрело особое значение благодаря обнаруженной ок. 1980 амер. математиком У. Тёрстоном её связи с топологией трёхмерных многообразий.

Литература

Лит.: Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. М., 1977; Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Шварцман О. В. Дискретные подгруппы групп Ли // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 21; Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Там же. 1988. Т. 29; Маргулис Г. А. Дискретные подгруппы полупростых групп Ли. М., 2006.