



ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Авторы: М. К. Потапов, Ю. В. Нестеренко

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ, раздел теории чисел, в котором изучаются приближения действительных чисел рациональными или, при более широком понимании, вопросы, относящиеся к решению в целых числах линейных и нелинейных неравенств или систем неравенств. Название «Д. п.» связано с именем [Диофанта](#), который занимался задачей решения алгебраич. уравнений в целых числах – т. н. [диофантовых уравнений](#). Один из методов теории Д. п. основан на использовании непрерывных дробей. Для приближений действительного числа α т. н. подходящими дробями p_k/q_k разложения α в непрерывную дробь справедливы неравенства $|\alpha - p_k/q_k| < 1/q_k^2$, $k=1, 2, \dots$, с другой стороны, если несократимая дробь a/b удовлетворяет неравенству $|\alpha - a/b| < 1/2b^2$, то она является подходящей дробью разложения α в непрерывную дробь. Существуют обобщения задачи о приближении числа рациональными дробями; к ним прежде всего относится задача об изучении выражений $x\theta - y - \alpha$, где θ и α – некоторые действительные числа, а x и y принимают целые значения (т. н. неоднородная одномерная задача). Среди теорем о приближённом решении в целых числах систем линейных уравнений (многомерные задачи Д. п.) известна теорема Кронекера: если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – действительные числа, для которых равенство $a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n = 0$ с целыми a_1, \dots, a_n возможно лишь при $a_1 = \dots = a_n = 0$, а β_1, \dots, β_n – некоторые действительные числа, то при любом заданном $\epsilon > 0$ можно найти число t и такие целые числа x_1, \dots, x_n , что выполняются неравенства $|t\alpha_k - \beta_k - x_k| < \epsilon$, $k=1, 2, \dots, n$. В теории Д. п. важное значение имеет её связь с геометрией. В кон. 19 в. Г. [Минковский](#) доказал ряд геометрич. теорем, имеющих приложения в теории диофантовых приближений.

В вопросах нелинейных Д. п. важные результаты получил И. М. [Виноградов](#). Одна из задач теории Д. п. – проблема приближения алгебраич. чисел рациональными. Существенные результаты здесь принадлежат А. [Тью](#), К. [Зигелю](#), англ. математику К. Ф. Роту и амер. математику В. М. Шмидту.

К Д. п. относятся некоторые теории трансцендентных чисел, в которых получены оценки для модулей линейных форм и многочленов с целыми коэффициентами от одного или нескольких переменных. Теория Д. п. тесно связана с разл. задачами аналитич. теории чисел.

Литература

Лит.: Гельфонд А. О. Приближение алгебраических чисел алгебраическими же числами и теория трансцендентных чисел // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. Вып. 4; Касселс Дж. Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961.