



# ДЗÉТА-ФУ́НКЦИЯ

ДЗÉТА-ФУ́НКЦИЯ Римана (

$\zeta$ -функция), аналитич. функция комплексного переменного

$s = \sigma + it$ , при

$\sigma > 1$  определяемая абсолютно и равномерно сходящимся [Дирихле рядом](#):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

При

$\sigma > 1$  справедливо представление в виде произведения Эйлера:

$$\zeta(s) = \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

где

$p$  пробегает все простые числа.

Тождественность ряда

(1) и произведения

(2) представляет собой одно из осн. свойств Д.-ф. Оно позволяет получить многочисл. соотношения, связывающие Д.-ф. с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Поэтому Д.-ф. играет большую роль в теории чисел.

Д.-ф. была введена как функция действительного переменного Л. [Эйлером](#) (1737, опубл. в 1744), который указал её разложение в произведение

(2). Затем Д.-ф. рассматривалась П. [Дирихле](#) и особенно успешно П. Л. [Чебышевым](#) в связи с изучением закона распределения простых чисел. Наиболее глубокие свойства Д.-ф. были обнаружены после работ Б. [Римана](#), впервые в 1859 рассмотревшего Д.-ф. как функцию комплексного переменного; им же введено назв. «Д.-ф.» и обозначение

$\zeta(s)$ .

Мн. проблемы теории простых чисел тесно связаны с нулями Д.-ф. Известно, что Д.-ф. имеет нули в точках

$s = -2n$ , где

$n = 1, 2, \dots$  (эти нули принято называть тривиальными), и что все остальные (нетривиальные) нули Д.-ф.

находятся в полосе

$0 < \sigma < 1$ , называемой критич. полосой. Б. Риман высказал предположение, что все нетривиальные нули Д.-ф.

расположены на прямой

$\sigma = 1/2$ . Эта гипотеза Римана до сих пор (2006) не доказана и не опровергнута.