



ДЕЛЕНИЕ

ДЕЛЕНИЕ, математич. операция, обратная [умножению](#), заключающаяся в нахождении одного из двух сомножителей, если известны произведение и др. сомножитель. Т. о., разделить число a на число d — значит найти такое число x , что $xd=a$. Результат Д. x называется частным, или отношением a и d , заданное произведение a — делимым, а заданный множитель d — делителем. Для обозначения Д. употребляют знаки двоеточия $a:d$ и горизонтальной или наклонной черты $\left(\frac{a}{d}, a/d\right)$. Знак двоеточия введён [Леонардо](#) Пизанским (1202), горизонтальной черты — англ. математиком У. Джонсом (1633). Термины «деление», «делитель», «делимое» впервые употребляются у франц. математика Герберта в кон. 10 в., «частное» — у Леонардо Пизанского в 1202. Соответствующие рус. термины ввёл Л. Ф. [Магницкий](#) (1703).

В пределах множества целых чисел Д. не всегда возможно (6 делится на 2 и 3, но не делится на 5), но в тех случаях, когда оно возможно, результат его определён единственным способом (однозначно). В множестве всех рациональных (целых и дробных) чисел Д. не только однозначно, но и всегда осуществимо, за исключением Д. на нуль. Если исходить из данного выше определения Д., то Д. числа, отличного от нуля, на нуль невозможно. Результатом Д. нуля на нуль, по этому определению, может быть любое число, т. к. $c \cdot 0 = 0$ для любого числа c . Обычно в математике считают, что Д. на нуль невозможно во всех случаях.

Наряду с точным Д., которое рассматривалось выше, используется Д. с остатком. Это, по существу, особая операция, отличная от Д. в определённом выше смысле. Если a и d — целые положительные числа, то операция деления с остатком числа a на число d состоит в нахождении целых неотрицательных чисел x и y таких, что $a=xd+y$, $y < d$. Эта операция всегда осуществима и однозначна. Если $y=0$, то говорят, что a делится на d без остатка. Существуют простые признаки делимости без остатка на некоторые положительные числа. Признак делимости целого положительного числа a на целое положительное число d — это условие, которому удовлетворяет a в том и только в том случае, когда оно делится на d без остатка. Желательно, чтобы это условие было легко проверить и чтобы эта проверка была не сложнее непосредственного деления числа a на d .

Пусть число a записано в десятичной системе счисления $a=a_n \dots a_2 a_1 a_0$, т. е. $a=a_0+10a_1+10^2a_2+\dots+10^na_n$. Из этого представления получаются признаки делимости на делители чисел 10, 100, 1000, ... В частности, для того чтобы число a делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра a_0 делилась на 2, т. к. число $a-a_0=10a_1+10^2a_2+\dots+10^na_n$ делится на 2. Для того чтобы a делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы a_0+10a_1 делилось на 4, т. к. $a-a_0-10a_1=10^2a_2+\dots+10^na_n$ делится на 4. Аналогично, a делится на 8 тогда и только тогда, когда $a_0+10a_1+100a_2$ делится на 8. Т. к. разность $(a_0+10a_1)-(a_0+2a_1)$ делится на 4 и, значит, числа a_0+10a_1 и a_0+2a_1 делятся или не делятся на 4 одновременно, признаку делимости на 4 можно дать такую форму: число a делится на 4 тогда и только тогда, когда a_0+2a_1 делится на 4.

Каждый признак делимости на число d сопоставляет числу a , если оно не слишком мало, некоторое неотрицательное число, меньшее a , которое делится на d тогда и только тогда, когда само a делится на d .

Другими словами, каждый признак делимости на число d определяется некоторой функцией f , принимающей целые значения и удовлетворяющей условию $|f(a)| \leq a$ для каждого целого положительного a , начиная с некоторого, причём $f(a)$ делится на d тогда и только тогда, когда a делится на d . Функция, удовлетворяющая этим условиям, называется функцией делимости на число d , множество всех таких функций обозначается $\Omega(d)$.

Перечисленные выше признаки делимости можно представить следующим образом: $f=a_0 \in \Omega(2) \cap \Omega(5)$, $f=a_0+10a_1 \in \Omega(4) \cap \Omega(25)$, $f=a_0+10a_1+100a_2 \in \Omega(8) \cap \Omega(125)$, $f=a_0+2a_1 \in \Omega(4)$. Т. к. 10^k , $k=1,2, \dots$, при делении на 3 и 9 даёт в остатке 1, число $a=a_0+10a_1+\dots+10^na_n$ представимо в виде $a=a_0+a_1+\dots+a_n+b$, где b делится на 9.

Поэтому a делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр $a_0+a_1+\dots+a_n$ делится на 3 (на 9), т. е. соответствующая функция делимости $f=a_0+a_1+\dots+a_n \in \Omega(9) \subset \Omega(3)$.

Целое положительное число, большее единицы, называется простым, если оно не делится без остатка ни на одно целое неотрицательное число, отличное от единицы и самого себя, в противном случае оно называется составным. Любое целое число, большее единицы, можно разложить в произведение простых чисел, напр., $924=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, причём это разложение единственно с точностью до порядка множителей. Данное число n делится на простое число p в том и только в том случае, если p встречается среди простых множителей, на которые разлагается n .

Для двух целых положительных чисел среди всех их общих делителей существует наибольший, называемый наибольшим общим делителем. Если наибольший общий делитель двух чисел равен единице, то числа называются взаимно простыми. Целое число, делящееся на два взаимно простых числа, делится на их произведение. На этом факте основаны простые признаки делимости на $6=2 \cdot 3$, на $12=3 \cdot 4$, на $15=3 \cdot 5$.

Описанная выше операция Д. с остатком аналогично определяется для многочленов вида $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$. Она состоит в нахождении по многочленам $P(x)$ и $Q(x)$ многочленов $S(x)$ и $R(x)$ таких, что $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$, где степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Эта операция также однозначна и всегда выполнима. Если $R(x)=0$, то $P(x)$ делится на $Q(x)$ без остатка. Аналогично теории делимости целых чисел строится теория делимости для многочленов. При разложении многочленов роль простых чисел играют неприводимые (не разлагающиеся на множители) многочлены. Свойство быть неприводимым зависит от того, какие числа допускаются в качестве коэффициентов. При действительных коэффициентах неприводимыми могут быть только многочлены 1-й и 2-й степеней, а при комплексных коэффициентах – только 1-й степени.

Литература

Лит.: Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 13-е изд. СПб., 2004; Депман И. Я. История арифметики. 3-е изд. М., 2006.