

# ДВОЙНО́Е ОТНОШÉНИЕ

ДВОЙНО́Е ОТНОШÉНИЕ четырёх точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  на прямой, число, обозначаемое символом  $(M_1M_2M_3M_4)$  и равное  $\frac{M_1M_3}{M_2M_3} : \frac{M_1M_4}{M_2M_4}$ , где  $M_iM_j$ ,  $i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j$ , означает длину отрезка, соединяющего точки  $M_i$  и  $M_j$ . При этом учитываются направления отрезков; напр., отношение  $M_1M_3/M_2M_3$  считается положительным, если направления отрезков  $M_1M_3$  и  $M_2M_3$  совпадают, и отрицательным в противном случае. Д. о. зависит от порядка нумерации точек, который может отличаться от порядка следования точек на прямой.

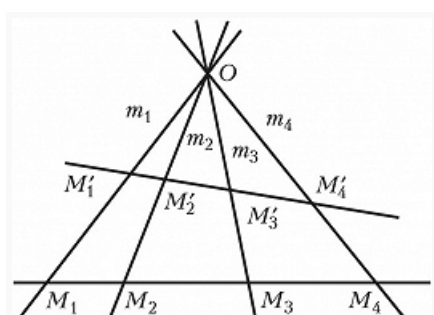


Рис. 1.

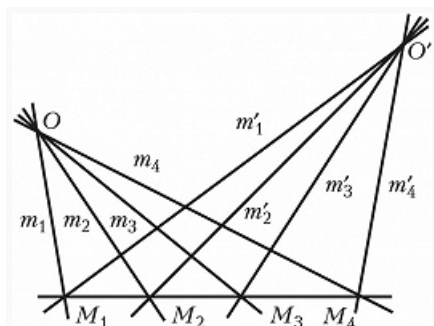


Рис. 2.

Наряду с Д. о. четырёх точек рассматривается Д. о. четырёх прямых  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , проходящих через общую точку  $O$ . Это отношение обозначается символом  $(m_1m_2m_3m_4)$  и равно  $\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_2m_3)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_2m_4)}$ , причём углы  $(m_im_j)$  между прямыми  $m_i$  и  $m_j$ ,  $i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j$ , рассматриваются со знаками.

Если точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$  лежат на прямых  $m_1, m_2, m_3, m_4$  (рис. 1), то  $(M_1M_2M_3M_4) = (m_1m_2m_3m_4)$ . Если точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$  и  $M'_1, M'_2, M'_3, M'_4$  получены пересечением одной четвёрки прямых  $m_1, m_2, m_3, m_4$  двумя разл. прямыми, то  $(M'_1M'_2M'_3M'_4) = (M_1M_2M_3M_4)$ . Если же прямые  $m_1, m_2, m_3, m_4$  и  $m'_1, m'_2, m'_3, m'_4$  проектируют одну четвёрку точек  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (рис. 2), то  $(m'_1m'_2m'_3m'_4) = (m_1m_2m_3m_4)$ . Д. о. не меняется при любом [проективном преобразовании](#), т. е. является инвариантом этого преобразования, поэтому Д. о. важны в [проективной геометрии](#). Особую роль играют четвёрки точек и прямых, для которых Д. о. равно  $-1$ . Такие

четвёрки называются гармоническими.