



ВИНОГРАДОВА МЕТОД

Авторы: А. А. Карацуба

ВИНОГРАДОВА МЕТОД, метод оценок тригонометрических сумм, используемых в разл. задачах теории чисел.

Тригонометрич. суммой называется конечная сумма $S = S(f) = \sum_{a < x \leqslant \lambda} f(x)$ Здесь $f(x)$ – вещественная функция целочисленного аргумента x , $\exp(2\pi i f(x)) = \cos(2\pi f(x)) + i \sin(2\pi f(x))$, $i^2 = -1$. Тригонометрич. суммами называют и такие суммы, в которых суммирование ведётся по целым числам x определённой арифметич. природы, напр. по простым числам, по бесквадратным числам и т. д. И. М. [Виноградов](#) обнаружил (1928), что мн. проблемы теории чисел, такие, как аддитивные, т. е. проблемы о разрешимости уравнений в целых числах, частными случаями которых являются [Варинга проблема](#) и [Гольдбаха проблема](#), проблемы о количестве точек с целочисленными координатами в областях на плоскости и в пространстве, проблемы поведения дробных долей вещественных функций, проблемы распределения простых чисел, проблемы распределения степенных вычетов и невычетов и др., могут быть сформулированы на языке тригонометрич. сумм. Применив тригонометрич. суммы для решения аддитивных проблем, И. М. Виноградов открыл мощный аналитич. метод решения осн. проблем теории чисел. Общая схема метода тригонометрич. сумм Виноградова такова. Выписывается точная формула, выражающая число решений изучаемого уравнения, или число дробных долей изучаемой функции, попадающих на заданный интервал, или число точек в заданной области, в виде интеграла от тригонометрич. сумм, или ряда, коэффициентами которого являются тригонометрич. суммы. Точная формула представляется суммой двух слагаемых – главного и дополнительного (напр., если рассматривается ряд Фурье характеристической функции интервала, то гл. слагаемое получается от нулевого коэффициента ряда Фурье); гл. слагаемое доставляет гл. член формулы, дополнительное – остаточный член. Основной при оценке остаточного члена является проблема получения возможно более точных оценок верхней грани модуля возникающих здесь тригонометрических сумм.

Литература

Лит.: Виноградов И. М. Избр. труды. М., 1952; он же. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд. М., 1980; он же. Особые варианты метода тригонометрических сумм. 2-е изд. М., 2004; Хуа Ло-кен. Метод тригонометрических сумм и его применение в теории чисел. М., 1964; Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды Математического института АН СССР. 1984. Т. 168; Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков А. А. Теория кратных тригонометрических сумм. М., 1987; Карацуба А. А. И. М. Виноградов и его метод тригонометрических сумм // Труды Математического института РАН. 1994. Т. 207.