



ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС

Авторы: Б. А. Севастьянов

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС, общее название случайных процессов, описывающих широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением к.-л. объектов в другие (напр., частиц в физике, молекул в химии, особей в популяциях в биологии). Осн. математич. предположением, выделяющим В. п. из всего класса [случайных процессов](#), является предположение независимости превращений объектов друг от друга.

Простейший В. п. связан с задачей о вырождении фамилий. Фамилия передаётся от отца к сыну. Пусть имеется один прародитель – основатель фамилии. Далее эта фамилия переходит к его сыновьям, его внукам из семей сыновей и т. д. Пусть

$Z(t)$ – число потомков прародителя по мужской линии в t -м поколении. Тогда число сыновей

$Z(1)$, число внуков

$Z(2)$ по мужской линии составляют генеалогич. дерево потомков – носителей фамилии прародителя. Если в некотором поколении

$Z(t) = 0$, то фамилия вырождается. Математич. моделью последовательности

$Z(t), t = 0, 1, 2, \dots$, будет В. п., если предположить, что число сыновей каждого носителя фамилии из генеалогического дерева является случайной величиной, эти случайные величины независимы (см.

[Независимость](#) в теории вероятностей) и имеют одинаковые распределения вероятностей. Если среднее число сыновей одного отца

$A \leq 1$, то вероятность

q вырождения В. п. равна 1. Если

$A > 1$, то вероятность

$q < 1$. В этом случае с вероятностью

$1 - q > 0$ все

$Z(t) \geq 1, t = 1, 2, \dots$. Другой пример В. п. связан с процессами размножения частиц нескольких типов. Пусть

$Z_j(t), j = 1, 2, \dots, n$, равно числу частиц

j -го типа в момент времени

t ; каждая частица

j -го типа с некоторыми вероятностями превращается независимо от др. частиц в совокупности частиц разных типов в последующие моменты времени. Время

t можно понимать либо как номер поколения частиц (дискретное время), либо как непрерывное время.

Поведение при больших

t средних

$A_j(t)$ чисел частиц

$Z_j(t)$ определяет характер эволюции В. п.

$(Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t))$ с конечным числом типов частиц. Если при больших

t все

$A_j(t) \rightarrow 0$, В. п. называется докритическим и вероятность его вырождения

$q = 1$; если же некоторые

$A_j(t)$ растут как показательные функции, В. п. будет надкритическим и вероятность его вырождения

$q < 1$. В критич. В. п.

$A_j(t)$ может расти степенным образом, но вероятность вырождения

$q = 1$.

Задача о вырождении фамилии рассматривалась в последней четв. 19 в. в работах англ. статистиков

Ф. Гальтона и Дж. Н. [Ватсона](#). Определение В. п. с конечным числом типов частиц и сам термин «В. п.» впервые

введены А. Н. [Колмогоровым](#) и Н. А. Дмитриевым (1947). С тех пор этот термин стал общепринятым. В

многочисл. публикациях подробно изучены В. п., в которых размножение частиц зависит от некоторых

параметров (напр., от возраста, размера или энергии), а также от их положения в пространстве и от момента

времени размножения. В общей модели В. п. предполагается также, что частица может производить потомство

неск. раз на протяжении своей жизни. В моделях В. п. в т. н. случайной среде частицы размножаются, хотя и

независимо друг от друга, но при этом испытывают влияние общего для всех частиц состояния случайной среды.

При исследованиях асимптотич. поведения распределения вероятностей числа частиц

$Z(t)$ при больших

t используются разнообразные математич. методы теории вероятностей и математич. статистики, а также

методы теории дифференциальных уравнений, нелинейных интегральных уравнений и функционального

анализа.

Разл. модели В. п. находят применение при расчётах реальных биологич., генетич., экологич., физич., химич. и

технич. процессов. В реальных процессах часто нарушается условие независимости размножения разл.

объектов; наоборот, размножение обычно связано с взаимодействием особей или частиц между собой. Так

обстоит дело во мн. биологич. процессах размножения, в процессах распространения эпидемии, в цепных химич.

реакциях и т. п. Однако начальные стадии развития таких процессов иногда можно рассчитывать с помощью

соответственно подобранных моделей В. п. Это можно делать в тех случаях, когда в среде имеется не очень

много активных частиц, которые при малых концентрациях почти не встречаются друг с другом, а изменения

состояния системы происходят при встречах этих активных частиц с частицами среды. В процессах

распространения эпидемии, напр., «активными частицами» можно считать больных индивидуумов. В генетике с

помощью В. п. можно рассчитывать явления, связанные с мутациями. В. п. с конечным числом типов частиц

может служить математич. моделью при расчётах цепных реакций; В. п. с диффузией частиц в ограниченной

области – моделью процессов, протекающих в ядерных реакторах. Явления, возникающие в ливнях космич.

лучей, также могут изучаться с помощью В. п. В телефонии расчёт некоторых систем с ожиданием также можно

сводить к моделям ветвящегося процесса.

Литература

Лит.: Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А. Ветвящиеся случайные процессы // Доклады АН СССР. 1947. Т. 56. № 1;

Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1971; Athreya K. B., Ney P. E. Branching processes. В., 1972; Ватулин

В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая

статистика. Теоретическая кибернетика. М., 1985. Т. 23; idem. Branching processes. II. Probability theory and mathematical statistics, 1 // Journal of Soviet Mathematics. 1993. Vol. 67. № 6.

Processing math: 100%