



ВЕ́КТОРНОЕ ИСЧИСЛÉНИЕ

Авторы: Э. Г. Позняк

ВЕ́КТОРНОЕ ИСЧИСЛÉНИЕ, раздел математики, в котором изучаются векторы евклидова пространства и операции над ними.

Возникновение В. и. связано с потребностями механики и физики. Основы В. и. были заложены исследованиями У. [Гамильтона](#) и Г. [Грассмана](#) (1844–1850). Их идеи были использованы Дж. К. [Максвеллом](#) в его работах по электричеству и магнетизму. Совр. вид В. и. придал Дж. [Гиббс](#). Значительный вклад в развитие В. и. внёс М. В. [Остроградский](#).

Векторная алгебра

Вектором называется направленный отрезок прямой, у которого один конец (точка A) считается началом, другой (точка B) – концом вектора. Обычно векторы обозначаются \overline{AB} , \overrightarrow{AB} , \boldsymbol{a} , \bar{a} , $\text{vec } a$, или просто a . Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым и обычно обозначается $\boldsymbol{0}$ или 0 . Характеристиками вектора являются его модуль (длина), который равен длине отрезка AB (обозначается $|AB|$), и направление от A к B . Нулевому вектору приписывают любое направление. Все нулевые векторы считаются равными. Вектор единичной длины называется единичным вектором или ортом. Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых, и компланарными, если они лежат на одной плоскости. Вектор называется свободным, если его начальная точка может быть выбрана произвольно. Обычно два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

Кроме свободных векторов в механике и физике часто рассматриваются векторы, которые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки (точкой приложения). Такие векторы называются связанными. Связанные векторы считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. Множество равных между собой векторов, расположенных на одной прямой, называется скользящим вектором. Задание скользящего или связанного вектора может быть заменено заданием двух свободных векторов. В В. и. рассматриваются только свободные векторы.

В векторной алгебре рассматриваются линейные операции над векторами, т. е. сложение векторов и умножение вектора на действительное число.

Суммой $a+b$ векторов a и b называется вектор, идущий из начала вектора a в конец вектора b при условии, что начало вектора b приложено к концу вектора a (рис. 1), этот вектор равен также диагонали параллелограмма, построенного на векторах a и b (рис. 2). Построение суммы нескольких векторов показано на рис. 3.

Произведением αa вектора a и числа α называется вектор, коллинеарный вектору a , имеющий длину $|\alpha| \cdot |a|$ и направление, совпадающее с направлением a при $\alpha > 0$ и противоположное при $\alpha < 0$.

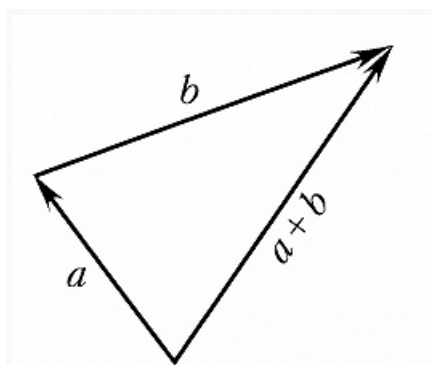


Рис. 1.

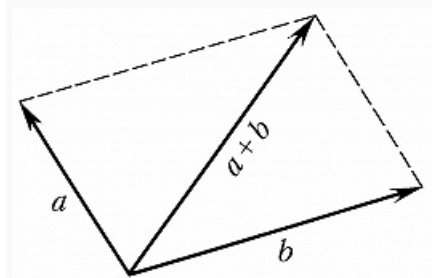


Рис. 2.

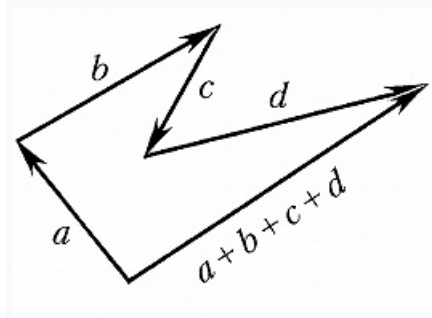


Рис. 3.

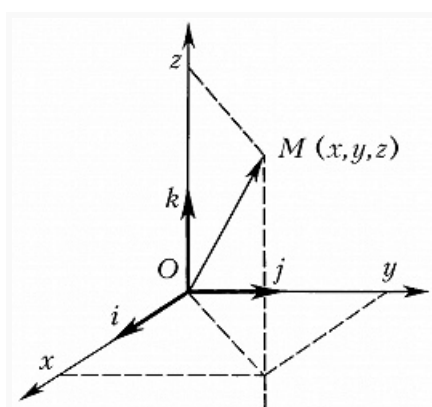


Рис. 4.

0. Если $\alpha = 0$ или $a = 0$, то $\alpha a = 0$.

Вектор $-1 \cdot a$ называется противоположным вектору a и обозначается $-a$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают свойствами $a+b = b+a$, $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a+0 = a$, $a+(-a) = 0$, $1 \cdot a = a$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, где a, b, c – векторы, α и β – действительные числа. Разностью $a-b$ векторов a и b называется вектор x такой, что $x+b = a$, $x = a+(-b)$. Множество всех векторов евклидова пространства с введёнными в нём операциями сложения и умножения на число образует [векторное пространство](#).

В векторной алгебре часто используются понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов. Векторы a_1, \dots, a_n называются линейно зависимыми, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ т. е. сумма векторов в левой части этого равенства равна нулевому вектору. В противном случае векторы a_1, \dots, a_n называются линейно независимыми.

В механике и физике обычно используются двумерные и трёхмерные векторные пространства. В трёхмерном пространстве существуют тройки линейно независимых векторов, любые четыре вектора линейно зависимы; в двумерном пространстве, т. е. на плоскости, существуют пары линейно независимых векторов, любые три вектора линейно зависимы. Линейно независимые векторы e_1, e_2, e_3 трёхмерного евклидова пространства образуют базис, т. е. любой вектор a может быть единственным образом представлен в виде $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ где a_1, a_2, a_3 – числа, называемые координатами (компонентами) вектора a в данном базисе. Вектор a с координатами a_1, a_2, a_3 часто записывают в виде $a = (a_1, a_2, a_3)$. Три взаимно ортогональных (перпендикулярных) вектора, длины которых равны единице и которые обычно обозначают i, j, k , образуют т. н. ортонормированный базис. Если начала этих векторов поместить в некоторую точку O , то получится декартова прямоугольная система координат в трёхмерном пространстве (рис. 4). Указанным выше

линейным операциям над векторами соответствуют аналогичные операции над их координатами: если векторы a и b имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , то сумма $a+b$ этих векторов имеет координаты $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, а вектор αa имеет координаты $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$.

Развитие и применение векторной алгебры тесно связаны с разл. векторными произведениями: скалярным, векторным и смешанным. Скалярным произведением векторов a и b называется число, обозначаемое (a, b) , равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(a, b) = |a| |b| \cos \varphi$$

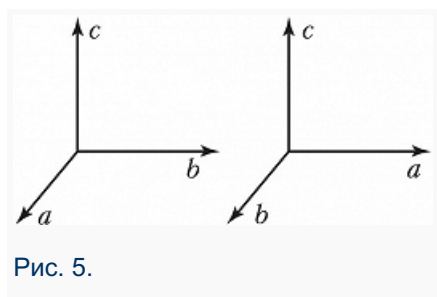
Скалярным произведением выражается, напр., работа силы F на прямолинейном пути s , которая равна $|F| |s| \cos \varphi$, где φ – угол между векторами F и s .

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$(a, b) = (b, a), \quad (\alpha a, b) = \alpha (a, b), (a+b, c) = (a, c) + (b, c), \quad (a, a) \geq 0,$$

где a, b, c - векторы, α - число; в последнем неравенстве равенство имеет место лишь при $a = 0$. Если в ортонормированном базисе i, j, k векторы a и b имеют соответственно координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , то

$$(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, |b| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



При определении векторного произведения используется понятие левой и правой упорядоченных троек векторов. Упорядоченная тройка векторов a, b, c (a - первый, b - второй, c - третий векторы), приведённых к общему началу и не лежащих в одной плоскости, называется правой (левой), если они располагаются так, как располагаются соответственно большой, указательный и средний пальцы правой (левой) руки. На рис. 5 изображены слева – правая, а справа – левая тройки векторов.

Векторным произведением векторов a и b называется вектор, обозначаемый $[a, b]$, такой, что длина вектора $[a, b]$ равна произведению длин векторов a и b на синус угла φ между ними, и если a и b неколлинеарны, то вектор $[a, b]$ перпендикулярен векторам a и b и направлен так, что тройка векторов $a, b, [a, b]$ является правой. В случае, если a и b коллинеарны, то $[a, b] = 0$. Векторное произведение обладает следующими свойствами:

$$[a, b] = -[b, a], \quad [(\alpha a), b] = \alpha [a, b], [c, (a + b)] = [c, a] + [c, b], [a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b), ([a, b], [c, d]) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c),$$

где a, b, c, d - векторы, α - число.

Если в ортонормированном базисе i, j, k , образующем правую тройку, векторы a и b имеют соответственно координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) , то

$$[a, b] = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

или

$$[a, b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Понятие векторного произведения применяется в разл. задачах механики и физики. Напр., момент силы F , приложенной к точке M , относительно точки O равен векторному произведению $[\overline{OM}, F]$.

Смешанным произведением векторов a, b и c называется число, обозначаемое abc , равное скалярному произведению $([a, b], c)$ вектора $[a, b]$ на вектор c . Смешанное произведение векторов a, b и c , не параллельных

одной плоскости, равно объёму параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах a , b и c , взятому со знаком плюс, если тройка a, b, c правая, и со знаком минус, если тройка левая. Если векторы a, b и c параллельны одной плоскости, то $abc = 0$. Справедливы также равенства $abc = bca = cab$. Если координаты векторов a, b и c в ортонормированном базисе i, j, k , образующем правую тройку, суть (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) и (c_1, c_2, c_3) , то

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Вектор-функции скалярных аргументов

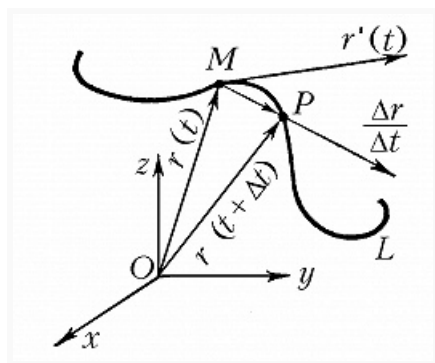


Рис. 6.

В механике, физике, дифференциальной геометрии широко используется понятие вектор-функции одного или нескольких скалярных аргументов.

Если каждому значению переменной t из некоторого множества $\{t\}$ ставится в соответствие определённый вектор r , то говорят, что на множестве $\{t\}$ задана вектор-функция (векторная функция) $r = r(t)$. Т. к. вектор r определяется координатами (x, y, z) в базисе i, j, k , то задание вектор-функции $r = r(t)$ эквивалентно заданию трёх скалярных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Понятие вектор-функции становится наглядным, если обратиться к [годографу](#) этой функции, т. е. множеству концов всех векторов $r(t)$, приложенных к началу координат O (рис. 6). Если при этом рассматривать аргумент t как время, то вектор-функция $r(t)$ представляет собой закон движения точки M , движущейся по кривой L – годографу функции $r(t)$.

При изучении вектор-функций важную роль играет понятие производной. Это понятие вводится следующим образом: аргументу t даётся приращение $\Delta t \neq 0$ и вектор $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ (на рис. 6 это вектор) умножается на $1/\{\Delta t\}$. Предел выражения $\Delta r / \{\Delta t\}$ при $\Delta t \rightarrow 0$ называется производной вектор-функции $r(t)$ и обозначается $r'(t)$ или dr/dt . Производная представляет собой вектор, касательный к годографу L в данной точке M . Если вектор-функция рассматривается как закон движения точки по кривой L , то производная $r'(t)$ равна скорости движения этой точки в момент t . Правила вычисления производных вектор-функций аналогичны правилам вычисления производных произведений обычных функций, напр.

$$(r_1, r_2)' = (r_1', r_2') + (r_2, r_2'), [r_1, r_2]' = [r_1', r_2] + [r_1, r_2'].$$

В дифференциальной геометрии вектор-функции одного аргумента используются для задания кривых. Для задания поверхностей пользуются вектор-функциями двух аргументов.

Векторный анализ

В механике, физике и геометрии широко используются понятия скалярных и векторных полей. Темп-ра неравномерно нагретой пластины и плотность неоднородного тела представляют собой физич. примеры соответственно плоского и пространственного скалярных полей. Примерами векторного поля являются множество всех векторов скоростей частиц установившегося потока жидкости, поле силы тяжести и напряжённость электр. поля.

Для математич. задания скалярных и векторных полей используются соответственно скалярные и векторные функции. Плотность тела представляет собой скалярную функцию точки, а поле скоростей частиц установившегося потока жидкости – векторную функцию точки. Для геометрич. характеристики скалярного поля используются понятия линий и поверхностей уровня. Линией уровня плоского скалярного поля называется линия, на которой функция, задающая поле, имеет постоянное значение. Аналогично определяется поверхность уровня пространственного скалярного поля. Примерами линий уровня могут служить изотермы – линии уровня скалярного поля температур неравномерно нагретой пластины.

Пусть M – произвольная точка на линии (поверхности) уровня скалярного поля. При движении точки M по линии (поверхности) уровня функция f , задающая поле, не меняется, а макс. изменение функции f происходит при смещении по нормали к этой линии (поверхности) в точке M . Это изменение характеризуется с помощью т. н. градиента скалярного поля. Градиент представляет собой вектор, направленный по нормали к линии (поверхности) уровня в точке M в сторону возрастания f в этой точке. Величина градиента равна производной функции f в указанном направлении. Градиент обозначается символом $\text{grad } f$. В базисе i, j, k градиент $\text{grad } f$ имеет координаты $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$ (для плоского поля $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$). Градиент скалярного поля представляет собой векторное поле.

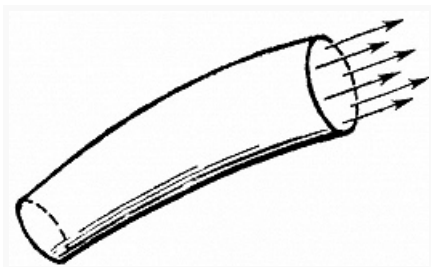


Рис. 8.

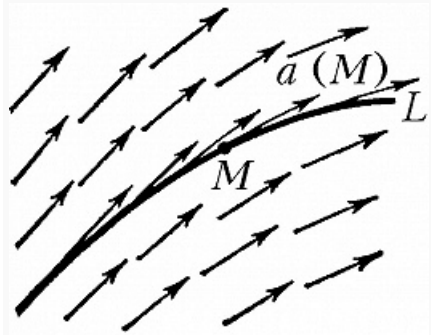


Рис. 7.

Для векторных полей вводятся понятия векторной линии, векторной трубки, циркуляции, дивергенции и вихря (ротора). Пусть в некоторой области Ω задано векторное поле с помощью векторной функции $a = a(M)$ переменной точки M из Ω . Линия L в области Ω называется векторной линией, если вектор касательной в каждой её точке M направлен по вектору $a(M)$ (рис. 7). Если поле a – поле скоростей частиц стационарного потока жидкости, то векторные линии этого поля – траектории частиц жидкости. Часть пространства в Ω , состоящая из векторных линий, называется векторной трубкой (рис. 8). В случае векторного поля скоростей частиц стационарного потока жидкости векторная трубка есть часть пространства, которую «заметает» при своём перемещении некоторый объём жидкости.

Пусть AB – некоторая гладкая линия в Ω , l – длина дуги, отсчитываемая от точки A до переменной точки M этой линии, t – единичный вектор касательной к AB в M . Циркуляцией поля a вдоль кривой

AB называется величина

$$\int_{AB} (a, t) dl.$$

Если a – силовое поле, то циркуляция a вдоль AB представляет собой работу этого поля вдоль пути AB .

Дивергенцией векторного поля a , имеющего в базисе i, j, k координаты P, Q, R , называется сумма

$$\partial P / \partial x + \partial Q / \partial y + \partial R / \partial z,$$

которая обозначается $\text{div } a$. Напр., дивергенция гравитационного поля, создаваемого некоторым распределением масс, равна объёмной плотности $\rho(x, y, z)$ этого поля, умноженной на 4π .

Вихрь (ротор) векторного поля \mathbf{a} представляет собой векторную характеристику вращательной составляющей этого поля, вихрь поля \mathbf{a} , обозначаемый $\mathrm{rot} \mathbf{a}$, равен

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Нахождение градиента скалярного поля, дивергенции и вихря векторного поля обычно называют осн. дифференциальными операциями векторного анализа. Справедливы следующие формулы, связывающие эти операции:

$$\mathrm{grad} (fh) = f \mathrm{grad} h + h \mathrm{grad} f, \mathrm{div} (fa) = (\mathbf{a}, \mathrm{grad} f) + f \mathrm{div} \mathbf{a}, \mathrm{rot} (fa) = f \mathrm{rot} \mathbf{a} + [\mathrm{grad} f, \mathbf{a}], \mathrm{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \mathrm{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \mathrm{rot} \mathbf{b}),$$

где f и h – скалярные, \mathbf{a} и \mathbf{b} – векторные поля. Векторное поле \mathbf{a} называется потенциальным полем, если это поле представляет собой градиент некоторого скалярного поля f . При этом поле f называется потенциалом векторного поля \mathbf{a} . Для того чтобы поле \mathbf{a} , координаты которого P, Q, R имеют непрерывные частные производные, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области Ω вихрь этого поля был равен нулю. Если в односвязной области Ω задано потенциальное поле \mathbf{a} , то потенциал f этого поля может быть найден по формуле

$$f(M) = \int_{AM} (\mathbf{a}, \mathbf{t}) dl,$$

в которой AM – любая гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку A из Ω с точкой M , \mathbf{t} – единичный вектор касательной к кривой AM и l – длина дуги AM , отсчитываемая от точки A .

Векторное поле \mathbf{a} называется соленоидальным, или трубчатым, если это поле представляет собой вихрь некоторого поля \mathbf{b} . При этом поле \mathbf{b} называется векторным потенциалом поля \mathbf{a} . Для того чтобы поле \mathbf{a} было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области Ω дивергенция этого поля была равна нулю. Векторное поле \mathbf{a} , для которого $\mathrm{div} \mathbf{a} = 0$, $\mathrm{rot} \mathbf{a} = \mathbf{Q}$ называется гармоническим.

В векторном анализе важную роль играют интегральные соотношения: [Остроградского формула](#), именуемая также основной формулой векторного анализа, и [Стокса формула](#).

Литература

Лит.: Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 9-е изд. М., 1965; Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1979; Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 2-е изд. М., 1980. Ч. 2; Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. М., 1981. Т. 2; Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 5-е изд. М., 1984.