



ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ

Авторы: С. А. Теляковский

ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИИ, характеристика колебаний функции. Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, вариацией называется точная верхняя грань сумм

$$\sum_{k=1}^n |f(x_{k-1}) - f(x_k)|, \quad (1)$$

взятая по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Значение этой верхней грани, если оно конечно, называют **В. ф.** f на $[a, b]$. В этом случае функцию f называют функцией ограниченной вариации или функцией с конечным изменением. Множество таких функций обычно обозначают V .

Если производная функции f непрерывна на $[a, b]$, то $f \in V$ и вариация f равна $\int_a^b |f'(x)| dx$. Функция f принадлежит V в том и только том случае, когда её можно представить в виде разности двух возрастающих ограниченных функций. Функции из V непрерывны всюду, за исключением не более чем счётного множества точек, в которых они имеют разрывы первого рода, и почти всюду имеют производную.

Функции ограниченной вариации введены М. Э. К. [Жорданом](#) (1881) в связи с изучением сходимости тригонометрич. [Фурье рядов](#). Он доказал, что ряды Фурье для функций f из V сходятся в каждой точке.

Функции ограниченной вариации нашли широкое применение во многих разделах математики, в частности в теории интеграла Стильтьеса.

Рассматривают обобщения **В. ф.**, когда вместо верхней грани сумм (1) берутся верхние грани сумм

$$\sum_{k=1}^n \varphi(|f(x_{k-1}) - f(x_k)|),$$

где $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная положительная при $t > 0$ функция и $\varphi(0) = 0$, напр., $\varphi(t) = t^p$, $p > 1$.

Известно несколько разл. определений **В. ф.** многих переменных.

Литература

Лит.: Витушкин А. Г. О многомерных вариациях. М., 1955; Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. СПб., 1999.