



БУЛЕВА АЛГЕБРА

Авторы: Д. А. Владимиров

БУЛЕВА АЛГЕБРА (булева решётка), частично упорядоченное множество специального вида. Б. а. можно формально определить как непустое множество с операциями \vee , \wedge , \neg удовлетворяющими аксиомам:

$$1) \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

$$2) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z, \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z;$$

$$3) \quad (x \wedge y) \vee y = y, \quad (x \vee y) \wedge y = y;$$

$$4) \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

$$5) \quad (x \wedge \bar{x}) \vee y = y, \quad (x \vee \bar{x}) \wedge y = y.$$

Упорядочение элементов Б. а. вводится условием: $x \leq y$ точно тогда, когда $x = x \wedge y$. В Б. а. существует наибольший элемент 1 – единица Б. а., $1 = x \vee \bar{x}$, и наименьший элемент 0 – нуль Б. а., $0 = x \wedge \bar{x}$.

Операции \vee и \wedge называются дизъюнкцией и конъюнкцией и иногда обозначаются \sup и \inf , а иногда \cup и \cap , чем подчёркивается их сходство с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. Конъюнкция также обозначается символом $\&$. Элемент Б. а. \bar{x} называется дополнением x и иногда обозначается Cx , x' , $\neg x$, $\neg x$. Дополнение всякого элемента в Б. а. единственно.

Б. а. можно определить и как дистрибутивную решётку (дистрибутивную структуру; см. [Решётки](#)), имеющую наибольший элемент 1 – единицу Б. а., наименьший элемент 0 – нуль Б. а. и содержащую вместе с каждым своим элементом x его дополнение – элемент Cx , удовлетворяющий соотношениям

$$\sup\{x, Cx\} = 1, \quad \inf\{x, Cx\} = 0.$$

Возможны и другие аксиоматич. определения Б. а. В аксиомах Б. а. отражена аналогия между понятиями множества, события, высказывания. Отношение порядка в Б. а. может быть (в зависимости от выбора интерпретации) истолковано как теоретико-множественное включение, как причинное следование для событий, как логич. следование для высказываний.

Кроме осн. операций \vee , \wedge , \neg в Б. а. могут быть определены и другие, среди которых особенно важна операция симметрич. разности

$$x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{x})$$

(пишут также $x \oplus y$, $|x - y|$).

Б. а. были введены Дж. Булем (1847) как аппарат символич. логики. В последующем Б. а. нашли широкое применение в разл. разделах математики – в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и др. В основе приложений Б. а. к логике лежит интерпретация элементов Б. а. как высказываний (см. [Алгебра логики](#));

при этом дополнение \bar{x} истолковывается как отрицание высказывания x , а операции \wedge и \vee – как конъюнкция и дизъюнкция высказываний. К логике близка и др. область применения Б. а. – теория контактных схем. Б. а. используются в аксиоматике теории вероятностей. Алгебры событий, изучаемые в теории вероятностей, суть Б. а.; при этом неравенство $x \leq y$ означает, что событие x влечёт событие y ; соответственно с этим истолковываются нуль Б. а., единица Б. а. и булевы операции \vee , \wedge , $\bar{}$.

Примером Б. а. является упорядоченная по включению система всех подмножеств фиксированного множества Q . Такая Б. а. обозначается 2^Q ; её нулём служит пустое множество, единицей – само множество Q . Дополнение элемента x есть множество $Q \setminus x$; булевы операции \vee и \wedge совпадают соответственно с объединением и пересечением.

Всякая Б. а. X изоморфна некоторой алгебре множеств. Б. а. X называется полной, если всякое множество $E \subset X$ имеет верхнюю грань $\sup E$ и нижнюю грань $\inf E$. Неполная Б. а. может быть многими способами пополнена, т. е. вложена в качестве подалгебры в некоторую полную Б. а.

Полная Б. а. называется нормированной, если на ней определена действительная функция μ (мера), обладающая свойствами: $\mu(x) > 0$ при $x \neq 0$; если $E \subset X$ и $x \wedge y = 0$ при $x, y \in E$, $x \neq y$, то

$$\mu(\sup E) = \sum_{x \in E} \mu(x).$$

В теории вероятностей, где нормированные Б. а. особенно важны, обычно предполагают, что $\mu(1) = 1$. При этом значение $\mu(x)$ интерпретируется как вероятность события x . На нормированные Б. а. в осн. переносится классич. теория меры и интеграла. Не всякая Б. а. может быть нормирована. Известны разл. условия существования меры, однако они далеко не исчерпывают проблемы нормируемости.

Б. а. может быть наделена разл. топологиями. Особенно важна т. н. (σ) - топология, которая в случае нормированной Б. а. метризуема и соответствует метрике

$$\rho(x, y) = \mu[(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)]$$

В общем случае может не существовать топологии, хорошо согласованной с порядком в булевой алгебре.

Литература

Лит.: Boole G. The mathematical analysis of logic. Camb.; L., 1847; Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952; Halmos P. Lectures on Boolean algebras. Toronto a. o., 1963; Куратовский К. Топология. М., 1969. Т. 2; Сикорский Р. Булевы алгебры. М., 1969; Владимиров Д. А. Булевы алгебры. М., 1969; Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М., 1972.