



# БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН

Авторы: Ю. В. Прохоров

**БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН**, общий принцип, согласно которому совместное действие большого числа случайных факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая.

Сближение частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний (т. н. устойчивость частот) может служить примером действия этого принципа.

На рубеже 17 и 18 вв. Я. [Бернулли](#) доказал теорему, утверждающую, что в последовательности независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления некоторого события  $A$  имеет одно и то же значение  $p$ ,  $0 < p < 1$ , верно соотношение 
$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$
 при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$ ; здесь  $S_n$  – число появлений события  $A$  в первых  $n$  испытаниях,  $S_n/n$  – частота появлений,  $P$  – вероятность события, указанного в скобках. Эта [Бернулли теорема](#) была распространена С. [Пуассоном](#) на случай последовательности независимых испытаний, где вероятность появления события  $A$  может зависеть от номера испытания. Пусть эта вероятность для  $k$ -го испытания равна  $p_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и пусть  $\bar{p}_n = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$ . Тогда Б. ч. з. в форме Пуассона утверждает, что 
$$P \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - \bar{p}_n \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$
 для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Строгое доказательство этого утверждения было дано П. Л. [Чебышевым](#) (1846). Термин «закон больших чисел» впервые встречается у Пуассона, так он назвал вышеуказанное обобщение теоремы Бернулли.

Дальнейшие обобщения утверждений Бернулли и Пуассона возникают, если заметить, что случайные величины  $S_n$  можно представить в виде суммы  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  независимых случайных величин, где  $X_k=1$ , если  $A$  появляется в  $k$ -м испытании, и  $X_k=0$  в противном случае,  $k=1, \dots, n$ . При этом [математическое ожидание](#)  $E(S_n/n)$  равно  $p$  для случая Бернулли и для случая Пуассона. Другими словами, в обоих случаях рассматривается отклонение среднего арифметического величин  $X_1, \dots, X_n$  от среднего арифметического их математич. ожиданий.

В работе П. Л. Чебышева «О средних величинах» (1867) было установлено, что для независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots$ , соотношение 
$$P \left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{E(X_1 + \dots + X_n)}{n} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$
 (3)

при  $n \rightarrow \infty$  верно для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  при весьма общих предположениях. Чебышев предполагал, что математич. ожидания  $E(X_k^2)$  ограничены одной и той же постоянной, хотя из его доказательства видно, что достаточно ограниченности [дисперсий](#)  $DX_k$ , или даже выполнения условия  $B_n^2 = E(X_1^2 + \dots + X_n^2) = o(n^2)$

при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, Чебышев показал возможность широкого обобщения теоремы Бернулли. А. А. [Марков](#)

отметил возможность дальнейших обобщений и предложил применять назв. «Б. ч. з.» ко всей совокупности обобщений теоремы Бернулли, и в частности к (3). Метод Чебышева основан на установлении общих свойств математич. ожиданий и на использовании т. н. [Чебышева неравенства](#). Последующие доказательства разл. форм Б. ч. з. в той или иной степени являются развитием метода Чебышева. Применяя надлежащее «урезание» случайных величин  $X_k$  (замену их вспомогательными величинами  $X_{k,n}$ , равными  $X_{k,n}=X_k$ , если  $|X_k - \mathbb{E} X_k| \leq t_n$ , и равными нулю в противном случае, где  $t_n$  зависят лишь от  $n$ ), Марков распространил Б. ч. з. на случаи, когда дисперсии слагаемых не существуют. Напр., он показал, что (3) имеет место, если для некоторого числа  $\delta > 0$  величины  $\mathbb{E}|X_k - \mathbb{E} X_k|^{1+\delta}$  ограничены одной и той же постоянной.

Аналогично доказывается теорема Хинчина (1929): если  $X_1, X_2, \dots$  имеют одинаковые законы распределения и  $\mathbb{E} X_1$  существует, то Б. ч. з. (3) выполняется.

Существуют примеры, когда Б. ч. з. не выполняется. Так, он не выполняется, если случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  имеют [Коши распределение](#), т. е. распределение с плотностью  $1/(\pi(1+x^2))$ . Здесь средние арифметические  $(X_1 + \dots + X_n)/n$  первых  $n$  случайных величин имеют при любом  $n$  то же самое распределение, что и отдельные слагаемые. Для распределения Коши математич. ожидание не существует.

Применимость Б. ч. з. к суммам зависимых величин связана в первую очередь с убыванием зависимости между случайными величинами  $X_i$  и  $X_j$  при увеличении разности их номеров, т. е. при увеличении  $|i-j|$ . Впервые соответствующие теоремы были доказаны А. А. Марковым (1907) для величин, связанных в [Маркова цепь](#).

Представление об отклонениях  $S_n/n$  от  $A_n = (\mathbb{E} X_1 + \dots + \mathbb{E} X_n)/n$ , наряду с неравенством Чебышева и его уточнениями, даёт [центральная предельная теорема](#).

Предыдущие результаты можно обобщать в разл. направлениях. Так, всюду выше рассматривалась т. н. сходимость по вероятности. Рассматривают и др. виды сходимости, напр. сходимость в среднем квадратичном и сходимость с вероятностью 1 (сходимость почти наверное). Обобщения Б. ч. з. на случай сходимости с вероятностью 1 называют усиленными Б. ч. з.

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  – последовательность случайных величин и, как и раньше,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Говорят, что последовательность  $X_1, X_2, \dots$  удовлетворяет усиленному Б. ч. з., если существует такая последовательность постоянных  $A_n$ , что вероятность соотношения  $S_n/n - A_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равна 1. Последовательность  $X_1, X_2, \dots$  удовлетворяет усиленному Б. ч. з. тогда и только тогда, когда при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  вероятность одновременного выполнения неравенств  $|\frac{S_n}{n} - A_n| \leq \varepsilon, |\frac{S_{n+1}}{n+1} - A_{n+1}| \leq \varepsilon, \dots$  стремится к 1 при  $n \rightarrow \infty$ . Т. о., здесь рассматривается поведение всей последовательности сумм в целом, в то время как в обычном Б. ч. з. речь идёт лишь об отд. суммах. Если последовательность  $X_1, X_2, \dots$  удовлетворяет усиленному Б. ч. з., то она удовлетворяет и обычному Б. ч. з. с теми же самыми  $A_n$ , т. е.  $\mathbb{P} \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - A_n \right| \leq \varepsilon \right\} \rightarrow 1$  при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Усиленный Б. ч. з. был впервые сформулирован и доказан Э. [Борелем](#) (1909) для схемы Бернулли. Частные

случаи схемы Бернулли возникают, напр., при разложении взятого наудачу (т. е. с равномерным распределением) действительного числа из отрезка  $[0, 1]$  в бесконечную дробь по к.-л. основанию. Так, в двоичном разложении  $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\omega)}{2^n}$  случайные величины  $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$  принимают два значения 0 и 1 с вероятностью  $1/2$  каждое и являются независимыми. Сумма  $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$  равна числу единиц среди первых  $n$  знаков двоичного разложения  $\omega$ , а  $S_n(\omega)/n$  – их доле. В то же время случайную величину  $S_n$  можно рассматривать как число «успехов» в схеме Бернулли с вероятностью «успеха» (появления 1), равной  $1/2$ . Борель доказал, что доля единиц  $S_n(\omega)/n$  стремится к  $1/2$  при  $n \rightarrow \infty$  для почти всех  $\omega$  из отрезка  $[0, 1]$  (т. е. лебегова мера множества тех точек  $\omega \in [0, 1]$ , для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega)/n = 1/2$ , равна 1). Аналогично, при разложении  $\omega$  по основанию 10 можно назвать «успехом» появление к.-л. одной из цифр 0, 1, ..., 9 (напр., цифры 3). При этом получается схема Бернулли с вероятностью успеха  $1/10$ , и частота появления выбранной цифры среди первых  $n$  знаков десятичного разложения  $\omega$  стремится к  $1/10$  для почти всех  $\omega$  из отрезка  $[0, 1]$  (такие числа  $\omega$  иногда называют нормальными). Борель отметил также, что частота появления любой фиксированной группы из  $g$  цифр стремится к  $1/10^g$  для почти всех  $\omega$ .

В случае независимых слагаемых наиболее известными являются условия справедливости усиленного Б. ч. з., установленные А. Н. [Колмогоровым](#): достаточное (1930) – для величин с конечными дисперсиями и необходимое и достаточное (1933) – для одинаково распределённых величин (закрывающееся в существовании математич. ожидания этих величин). Теорема Колмогорова для независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  с конечными дисперсиями утверждает, что из условия  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty$  вытекает справедливость усиленного Б. ч. з. с  $A_n = E(S_n/n)$ .

Представление об отклонениях  $S_n/n$  от  $A_n$  даёт [повторного логарифма закон](#).

## Литература

Лит.: Бернулли Я. О законе больших чисел. М., 1986; Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 1986; Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. 10-е изд. М., 2003; Ширяев А. Н. Вероятность-1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. 3-е изд. М., 2004; Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 8-е изд. М., 2005.