



БÉССЕЛЯ ФУ́НКЦИИ

Авторы: П. И. Лизоркин

БÉССЕЛЯ ФУ́НКЦИИ, *цилиндрические функции* 1-го рода; используются при изучении физич. процессов (теплопроводности, диффузии, колебаний и пр.), рассматриваемых в областях с круговой и цилиндрич. симметрией. Б. ф. являются решениями *Бесселя уравнения*.

Б. ф. J_p порядка (индекса) p , $-\infty < p < \infty$, представляется сходящимся при всех x рядом $J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{p+2k}$, где Γ — гамма-функция. График $J_p(x)$ при $x > 0$ представляет собой кривую с затухающими колебаниями; $J_p(x)$ имеет бесконечное множество нулей; первые слагаемые ряда дают асимптотику $J_p(x)$ при малых $|x|$, при больших $x > 0$ справедливо асимптотич. представление $J_p(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4}\right)$.

Б. ф. порядка $p = n + \frac{1}{2}$, где n — целое число, выражаются через элементарные функции; в частности, $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

Б. ф. $J_p \left(\frac{\mu_n^p}{l} x\right)$, где $\frac{\mu_n^p}{l}$ — положительные корни уравнения $J_p(x) = 0$, $p = -\frac{1}{2}, l$ — некоторое положительное число, образуют ортогональную с весом x систему на интервале $(0, l)$.

Функция J_0 была впервые исследована Д. *Бернулли* в работе, посвящённой колебаниям тяжёлых цепей (1732). Л. *Эйлер*, рассматривая задачу о колебаниях круглой мембраны (1738), пришёл к уравнению Бесселя с целыми значениями $p = n$ и нашёл выражение $J_n(x)$ в виде ряда по степеням x , позднее он распространил это выражение на случай произвольных значений p . Ф. *Бессель* в связи с изучением движения планет вокруг Солнца исследовал (1824) функции $J_p(x)$ и составил первые таблицы для $J_0(x)$, $J_1(x)$.

Литература

Лит.: Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., 1949. Ч. 1–2; Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. 2-е изд. М.; Л., 1963; Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.