



БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Авторы: С. А. Теляковский

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ бесконечной последовательности чисел

p_1, p_2, \dots , формально записанное произведение

$$p_1 p_2 \dots = \prod_{k=1}^{\infty} p_k.$$

Если последовательность частичных произведений

$$P_n = p_1 p_2 \dots p_n \text{ при}$$

$n \rightarrow \infty$ сходится к числу

P , не равному нулю, то Б. п. называют сходящимся,

P называют значением Б. п. и пишут

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} p_k. \text{ Если последовательность}$$

P_n не сходится к конечному пределу или сходится к нулю, то Б. п. называют расходящимся.

Сходимость Б. п., все множители

p_k которого положительны, равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k.$$

Для сходимости Б. п. необходимо, чтобы

$$p_k \rightarrow 1 \text{ при}$$

$k \rightarrow \infty$, поэтому Б. п. часто записывают в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

Если все числа

a_k имеют одинаковые знаки, то сходимость такого Б. п. равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Множителями Б. п. могут быть комплексные числа, функции и вообще элементы произвольной природы, для которых определены произведение конечного набора множителей и сходимость последовательностей элементов.

Б. п. используются для представления многих важных постоянных и функций. Напр. [Валлиса формула](#) даёт представление числа

π в виде Б. п.; установленная Л. [Эйлером](#) формула

$$\sin x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$$

хдаёт представление функции

$\sin x$ в виде Б. п., которое можно рассматривать как аналог разложения многочлена на произведение многочленов первой и второй степеней.

Б. п. впервые встречаются в работе Ф. [Буега](#) (1593).

Литература

Лит.: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд. М.; СПб., 2003. Т. 2;

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 5-е изд. М., 2004. Ч. 1.

Processing math: 100%