



БЕЛЛМАНА УРАВНЕНИЕ

БЕЛЛМАНА УРАВНЕНИЕ, рекуррентное соотношение для решения задачи оптимального управления с аддитивной целевой функцией. Метод нахождения оптимального управления с помощью Б. у. получил название *динамического программирования*. Уравнение носит имя Р. *Беллмана*, сформулировавшего принципы динамич. программирования в кон. 1950-х гг.

Решением Б. у. являются оптимальные значения целевой функции и оптимального управления для всех возможных состояний системы на каждом шаге управления. Нахождение оптимального управления в многошаговой задаче с n шагами начинается с последнего шага, для чего составляется и решается Б. у. в одношаговой задаче, затем с использованием решения первой задачи составляется и решается Б. у. с двумя шагами, и так до начального момента, на котором выбирается первый из n шагов.

Напр., в задаче распределения ресурсов однородный ресурс X должен быть распределён между N производственными процессами. Если для k -го процесса выделяется ресурс x_k , то получается доход $\varphi_k(x_k)$, $k=1, \dots, N$. Требуется распределить ресурс X по процессам таким образом, чтобы суммарный доход был максимальным. Др. словами, требуется найти максимум $f_N(X) = \max \sum_{k=1}^N \varphi_k(x_k)$ аддитивной целевой функции $\sum_{k=1}^N \varphi_k(x_k)$ при условиях $x_k \geq 0$, $k=1, \dots, N$, $x_1 + \dots + x_N = X$.

Для применения подхода динамич. программирования к данной задаче рассматривается семейство задач с любым числом шагов $n \leq N$ и любым запасом ресурса $0 \leq x \leq X$. Многошаговость принятия решения вводится искусственно, на 1-м шаге выделяется ресурс x_n для n -го процесса, на 2-м шаге выделяется ресурс x_{n-1} для $(n-1)$ -го процесса и т. д. В силу аддитивности целевой функции справедливо рекуррентное соотношение $f_n(x) = \max_{x_n} (\varphi_n(x_n) + f_{n-1}(x - x_n))$, $n=2, \dots, N$, где $f_1(x) = \varphi_1(x)$. Это рекуррентное соотношение представляет собой Б. у. в этой задаче. Оно позволяет при всех допустимых значениях $x \leq X$ последовательно находить функции $f_1(x)$, \dots , $f_n(x)$, начиная с $f_1(x)$, и соответствующие оптимальные управления $x_1(x)$, \dots , $x_n(x)$, где $x_k(x)$ – оптимальный выбор ресурса для k -го процесса в задаче k шагами, $k=1, \dots, n$.

Оптимальный доход для исходной задачи равен $f_N(X)$. Тем самым решение исходной задачи максимизация функции от N переменных сводится к решению N задач, в каждой из которых максимизация проводится по одной переменной.

Наряду с задачами с конечным числом шагов рассматриваются задачи с бесконечным числом шагов, а также задачи с непрерывным временем. В задачах оптимального управления с непрерывным временем Б. у. представляют собой дифференциальные уравнения спец. вида.

Литература

Лит.: Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960; Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М., 1965; Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление

детерминированными и стохастическими системами. М., 1978.

Loading [MathJax]/jax/output/HTML-CSS/fonts/TeX/fontdata.js