БЕЗУСЛО́ВНОЙ МИНИМИЗА́ЦИИ МЕ́ТОДЫ

Авторы: Ю. Г. Евтушенко

БЕЗУСЛО́ВНОЙ МИНИМИЗА́ЦИИ МЕ́ТОДЫ, методы, предназначенные для нахождения минимума функции многих переменных $f(x)$ в случае, когда на значения аргумента не налагаются дополнит. ограничения. Б. м. м. составляют важный класс методов оптимизации. Задача о нахождении максимума изменением знака функции $f(x)$ сводится к задаче о нахождении минимума. В случае, когда f зависит от одной скалярной переменной x, минимизацию функции $f(x)$ обычно называют одномерной. К группе методов одномерной минимизации относятся: метод половинного деления, случайный поиск, метод Фибоначчи, метод золотого сечения и др.

В Б. м. м. в процессе минимизации строится некоторая последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ многомерного пространства и в зависимости от значений функции f в этих точках находится новая точка x_{k+1}. Правило построения последовательности определяется выбранным методом минимизации.

В Б. м. м. важную роль играет гладкость функции f. Увеличение гладкости минимизируемой функции f позволяет строить более эффективные методы. Б. м. м. подразделяют на три осн. класса.

Один из классов составляют методы, не использующие производные функции f. В этот класс входят случайный поиск, метод покоординатного спуска и др.

Другой класс образуют градиентные методы, в которых предполагается, что функция f один раз дифференцируема. В методе градиентного спуска после вычисления значения функции f и её градиента f_x в точке x_k новая точка находится по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f_x(x_k),$$

где α_k – неотрицательное число (шаг спуска). При некоторых условиях последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится к точке локального минимума функции $f(x)$. Если при каждом k величина α_k определяется из условия одномерной минимизации функции $f(x_{k+1})$ по α_k, то приходят к методу наискорейшего спуска. Существуют также методы, называемые s-шаговыми, в которых новая точка x_k определяется по s предыдущим точкам. Одним из простейших двухшаговых методов является метод сопряжённого градиента, в котором

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f_x(x_k) + \beta_k(x_k - x_{k-1}),$$

где $\alpha_k \geqslant 0$, $\beta_k \geqslant 0$ – параметры, определяемые решением задачи двумерной минимизации $f(x_{k+1})$ по α_k и β_k.

К третьему классу относится метод Ньютона и его модификации. Предполагается, что функция f дважды дифференцируема. Точка x_{k+1} вычисляется по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f_{xx}^{-1}(x_k) f_x(x_k),$$

где $f_{xx}^{-1}(x_k)$ – матрица, обратная к матрице вторых производных $f_{xx}(x_k)$. При $\alpha_k \equiv 1$ этот метод называется методом Ньютона и часто применяется при решении прикладных задач. Недостатком этого метода является трудоёмкость вычислений и локальный характер сходимости.

Существуют модификации метода Ньютона. В некоторых из них для уменьшения времени расчётов матрица $f_{xx}(x_k)$ фиксируется на нескольких подряд идущих шагах. В др. вариантах шаг α_k выбирается из условия минимума значения функции $f(x_{k+1})$ либо нормы её градиента.

Перечисленные Б. м. м. предназначены для отыскания локальных минимумов функции $f(x)$, и только для выпуклых функций найденные решения дают глобальный минимум. Задача о поиске минимума ещё более усложняется в случае отыскания условного минимума, когда на значения аргумента x налагаются дополнит. ограничения.

Литература

Лит.: Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975; Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982; Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М., 1983; Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М., 2002.