



# БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ МЕТОДЫ

Авторы: Ю. Г. Евтушенко

БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ МЕТОДЫ, методы, предназначенные для нахождения минимума функции многих переменных  $f(x)$  в случае, когда на значения аргумента не налагаются дополнительные ограничения. Б. м. м. составляют важный класс методов оптимизации. Задача о нахождении максимума изменением знака функции  $f(x)$  сводится к задаче о нахождении минимума. В случае, когда  $f$  зависит от одной скалярной переменной  $x$ , минимизацию функции  $f(x)$  обычно называют одномерной. К группе методов одномерной минимизации относятся: метод половинного деления, случайный поиск, метод Фибоначчи, метод золотого сечения и др.

В Б. м. м. в процессе минимизации строится некоторая последовательность точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$  многомерного пространства и в зависимости от значений функции  $f$  в этих точках находится новая точка  $x_{k+1}$ . Правило построения последовательности определяется выбранным методом минимизации.

В Б. м. м. важную роль играет гладкость функции  $f$ . Увеличение гладкости минимизируемой функции  $f$  позволяет строить более эффективные методы. Б. м. м. подразделяют на три осн. класса.

Один из классов составляют методы, не использующие производные функции  $f$ . В этот класс входят случайный поиск, метод покоординатного спуска и др.

Другой класс образуют градиентные методы, в которых предполагается, что функция  $f$  один раз дифференцируема. В методе градиентного спуска после вычисления значения функции  $f$  и её градиента  $f'_x$  в точке  $x_k$  новая точка находится по формуле  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'_x(x_k)$ , где  $\alpha_k$  – неотрицательное число (шаг спуска). При некоторых условиях последовательность  $x_1, x_2, \dots$  сходится к точке локального минимума функции  $f(x)$ . Если при каждом  $k$  величина  $\alpha_k$  определяется из условия одномерной минимизации функции  $f(x_{k+1})$  по  $\alpha_k$ , то приходят к методу наискорейшего спуска. Существуют также методы, называемые  $s$ -шаговыми, в которых новая точка  $x_k$  определяется по  $s$  предыдущим точкам. Одним из простейших двухшаговых методов является метод сопряжённого градиента, в котором  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'_x(x_k) + \beta_k(x_k - x_{k-1})$ , где  $\alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0$  – параметры, определяемые решением задачи двумерной минимизации  $f(x_{k+1})$  по  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ .

К третьему классу относится метод Ньютона и его модификации. Предполагается, что функция  $f$  дважды дифференцируема. Точка  $x_{k+1}$  вычисляется по формуле  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k f''_{xx}^{-1}(x_k) f'_x(x_k)$ , где  $f''_{xx}^{-1}(x_k)$  – матрица, обратная к матрице вторых производных  $f''_{xx}(x_k)$ . При  $\alpha_k \equiv 1$  этот метод называется методом Ньютона и часто применяется при решении прикладных задач. Недостатком этого метода является трудоёмкость вычислений и локальный характер сходимости.

Существуют модификации метода Ньютона. В некоторых из них для уменьшения времени расчётов матрица  $f''_{xx}(x_k)$  фиксируется на нескольких подряд идущих шагах. В др. вариантах шаг  $\alpha_k$  выбирается из условия минимума значения функции  $f(x_{k+1})$  либо нормы её градиента.

Перечисленные Б. м. м. предназначены для отыскания локальных минимумов функции  $f(x)$ , и только для выпуклых функций найденные решения дают глобальный минимум. Задача о поиске минимума ещё более усложняется в случае отыскания условного минимума, когда на значения аргумента  $x$  налагаются дополнительные ограничения.

## Литература

Лит.: Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975; Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М., 1982; Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М., 1983; Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М., 2002.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/GreekAndCoptic.js