



БА́ЗИС

Авторы: А. А. Шкаликов

БА́ЗИС в математике, минимальный набор элементов, через которые можно выразить (представить) все элементы рассматриваемого множества или пространства. Понятие Б. используется в алгебре, функциональном анализе, геометрии, топологии, математич. логике. В зависимости от раздела математики, где используется понятие Б., слова «минимальный», «выразить» («представить») приобретают конкретное содержание. Важнейшим примером Б. в конечномерном действительном (комплексном) векторном пространстве $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$, состоящем из векторов с координатами x_1, \dots, x_n , является набор векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$, где e_k — вектор, k -я координата которого равна 1, а остальные равны нулю, $k = 1, \dots, n$. Любой элемент пространства $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ можно выразить как линейную комбинацию элементов $\{e_1, \dots, e_n\}$, т. е. как сумму этих элементов, умноженных на числа. Минимальность здесь означает, что никакая часть набора $\{e_1, \dots, e_n\}$ этим свойством не обладает.

Векторные пространства, в которых нет конечного Б., называют бесконечномерными. В бесконечномерных сепарабельных [банаховых пространствах](#) Б. определяют как счётный набор элементов $\{e_1, e_2, \dots\}$, обладающий следующим свойством: любой элемент x пространства представим единственным образом в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

где c_k , $k = 1, 2, \dots$, — числа, а ряд сходится по норме пространства. Известная проблема Банаха о существовании базиса в произвольном сепарабельном банаховом пространстве была отрицательно решена швед. математиком П. Энфло (1974). В банаховых пространствах можно определить Б. разных типов, их изучение — предмет содержательной теории. В сепарабельных [гильбертовых пространствах](#) наибольшее применение находят ортонормированные Б., т. е. такие Б. e_1, e_2, \dots , для которых скалярные произведения $(e_i, e_j) = 0$, $i \neq j$, и $(e_i, e_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Важнейшим примером Б. в пространствах $L_p[0, 1]$, $p > 1$, состоящих из функций, интегрируемых в p -й степени по Лебегу, является тригонометрич. система $\{e^{2\pi i n x}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Эта система — ортонормированный Б. в $L_2[0, 1]$, а в $L_1[0, 1]$ она Б. не является.

Loading [MathJax]/jax/element/mml/optable/GreekAndCoptic.js