



АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ К-ТЕОРИЯ

Авторы: И. А. Панин

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ К-ТЕОРИЯ, изучает т. н. К-группы, $K_n(R)$, $n=0, 1, \dots$, определённые для любого кольца R .

Группа $K_0(R)$ введена франц. математиком А. Гротендиком (1957). Её образующими являются классы изоморфизма $[P]$, $[Q]$, ... конечно-порождённых модулей P , Q , ... над кольцом R (см. в статьях [Модуль](#), [Гомологическая алгебра](#)). Порождающие соотношения группы $K_0(R)$ имеют вид $[P]+[Q]=[P \oplus Q]$. В случае, когда R — поле или кольцо многочленов над полем, группа $K_0(R)$ является кольцом целых чисел \mathbb{Z} .

Группа $K_1(R)$, называемая группой Уайтхеда (введена амер. математиком Дж. Уайтхедом, 1950), совпадает с фактор-группой группы $GL(R)$ всех матриц с коэффициентами из R по подгруппе $E(R)$, порождённой элементарными матрицами, т. е. матрицами, отличающимися от единичной в одном единственном недиагональном члене. Если R — поле, то $K_1(R)$ совпадает с мультипликативной группой R^\times поля R .

Группа $K_2(R)$ введена Дж. Милнором (1971), она совпадает с группой всех нетривиальных соотношений между элементарными матрицами. Если R — поле, то группа $K_2(R)$ порождается символами $\{a, b\}$ ($a, b \in R^\times$) подчинёнными соотношениям $\{a_1, a_2, b\} = \{a_1, b\} + \{a_2, b\}$, $\{a, b_1, b_2\} = \{a, b_1\} + \{a, b_2\}$ и $\{a, 1-a\} = 0$ для a , не равных 0 и 1.

Группы $K_n(R)$ для всех $n \geq 0$ построены амер. математиком Д. Куилленом (1972). Ранее Милнор определил $K_n(R)$ для полей, задав их символами $\{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in R^\times$, которые билинейны по каждому аргументу и $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$, если $a_{i+1} = 0$ для некоторого i . Группы Милнора не совпадают с группами Куиллена.

С помощью К-групп решены многие трудные проблемы, не поддававшиеся решению с использованием др. методов. Введённая А. Гротендиком группа $K_0(R)$ была им использована для доказательства и значит. обобщения теоремы Римана — Роха — Хирцебруха в [алгебраической геометрии](#). Введённая Дж. Уайтхедом группа $K_1(R)$ сыграла осн. роль в решении т. н. конгруенц-проблемы: пусть K — числовое поле (конечное расширение поля \mathbb{Q}) и \mathbb{Z} — его кольцо целых чисел (если $K = \mathbb{Q}$, то $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$); требуется установить, всякая ли подгруппа конечного индекса в $SL_n(R)$ содержит группу всех матриц, сравнимых с единичной по модулю некоторого идеала $I \subset R$. Проблема решается утвердительно для подполей K поля вещественных чисел \mathbb{R} . К-группы Милнора поля можно связать с когомологиями группы Галуа его алгебраич. замыкания (теоремы Меркурьева — Суслина, Воеводского). В топологии с помощью К-групп решены проблемы об индексе эллиптич. оператора, о векторных полях на сфере и др. А. К-т. находит применения и в теории чисел (нахождение групп Галуа абелевых расширений локальных полей, вычисление значений дзета-функций в целых точках).

Литература

Лит.: Басс Х. Алгебраическая К-теория. М., 1973; Algebraic K-theory. В. е. а., 1973. Vol. 1–3; Милнор Дж. Введение в алгебраическую К-теорию. М., 1974.

