



# АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Авторы: В. Б. Шехтман

**АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД**, метод построения научной теории, при котором выбирается ряд исходных утверждений, называемых *аксиомами*, а дальнейшие утверждения (*теоремы*) получаются из них с помощью чисто логических рассуждений (доказательств). Классич. образец применения А. м. – изложенная в «Началах» Евклида (ок. 300 до н. э.) аксиоматич. система, которая охватывала всю известную в то время математику. Влияние А. м. распространилось и на др. области знания: физику, биологию, философию, богословие.

На протяжении многих столетий «Начала» Евклида были единственным примером аксиоматич. теории. Начиная с 19 в. создаются новые теории, напр. *Лобачевского геометрия*, аксиоматич. теории действительных и натуральных чисел. В нач. 20 в. были построены *аксиоматические теории множеств*, повлиявшие на развитие всей математики.

Формальное определение аксиоматич. теории было дано Д. *Гильбертом*. При формальном описании теории задаётся её язык (правила построения выражений разл. типов, в т. ч. формул, которые соответствуют содержательным утверждениям), выделяется класс формул, называемых аксиомами теории, и описываются правила вывода, позволяющие строить доказательства теорем. Доказательство есть последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих по одному из правил вывода. Теория называется непротиворечивой, если в ней нельзя получить противоречие, т. е. отрицания её теорем не являются теоремами; и полной, если для любой формулы  $A$ , либо  $A$ , либо отрицание  $A$  является теоремой. При построении формальных теорий вопрос о непротиворечивости является ключевым. Для установления непротиворечивости обычно используется метод интерпретаций. При синтаксич. интерпретации теории  $T$  выбирается другая теория  $T_1$ , непротиворечивость которой предполагается известной; интерпретация переводит формулы  $T$  в формулы  $T_1$ , а теоремы  $T$  – в теоремы  $T_1$ . При семантической интерпретации строится модель теории: теоремы превращаются в истинные содержательные утверждения об объектах некоторого универсума. Если теория имеет модель, то она непротиворечива. Путём интерпретации доказательство непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к доказательству непротиворечивости теории действительных чисел, а доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского – к доказательству непротиворечивости евклидовой геометрии.

Вопросы о непротиворечивости стали особенно актуальны в нач. 20 в. после обнаружения парадоксов *множеств теории*. В связи с этим в нач. 20 в. Д. Гильбертом выдвинута программа обоснования математики, целью которой было доказательство непротиворечивости формальных теорий, использующих бесконечные множества. Программа Гильберта существенно переосмыслена после открытий К. *Гёделя* (1931–32). Для любой непротиворечивой теории  $S$ , содержащей арифметику и заданной алгоритмически перечислимым списком аксиом, установлено, что теория  $S$  неполна (теорема Гёделя о неполноте) и непротиворечивость теории  $S$  нельзя доказать средствами самой теории  $S$  (теорема Гёделя о непротиворечивости). Первый результат, по

существо, означает, что окончательная формализация науч. знания невозможна, и в любой достаточно сильной аксиоматич. теории имеются проблемы, которые неразрешимы в самой этой теории. Вторым результатом показывает, что такой проблемой является непротиворечивость теории  $S$ , и для её доказательства требуются неарифметич. средства. С помощью дополнительных принципов были получены доказательства непротиворечивости арифметики, анализа и ряда др. теорий. Была усилена теорема Гёделя о неполноте: найдены арифметич. утверждения, которые истинны, но недоказуемы в формальной арифметике.

Формальная аксиоматич. теория называется алгоритмически разрешимой, если для любой формулы  $A$  существует алгоритм, который за конечное число шагов определяет, является ли формула  $A$  теоремой. Программа Гильберта подразумевала, что формальное доказательство теорем можно механизировать. Однако неразрешима даже простейшая теория – исчисление предикатов, неразрешима всякая непротиворечивая теория, содержащая арифметику, и многие др. теории. С другой стороны, обнаружены и нетривиальные примеры разрешимых теорий, напр. евклидова геометрия и теория конечных полей.

Альтернативным А. м. является генетический (конструктивный) метод, при котором новые науч. законы находятся опытным путём, а не как логические следствия известных результатов. Генетич. метод развивался в 20 в. в интуиционистском (франц. математик Г. Вейль, голл. математик Л. Брауэр) и конструктивном (А. А. Марков) направлениях математики.

А. м. сыграл и продолжает играть важную роль в основаниях математики.

## Литература

Лит.: Бурбаки Н. Начала математики. М., 1965. Ч. 1. Кн. 1: Теория множеств; Клини С. К. Математическая логика. М., 1973; Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1973; Ефимов Н. В. Высшая геометрия. 6-е изд. М., 1978; Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики: Теория доказательств. М., 1982; Справочная книга по математической логике: В 3 ч. М., 1982; Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод? 2-е изд. Ижевск, 2001.