



АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Авторы: В. Г. Кановей

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ, направление в математич. логике, занимающееся изучением аксиоматич. методом объектов теории множеств. Под А. т. м. также понимается любая конкретная система, формализующая теорию множеств. А. т. м. возникла в нач. 20 в. в Европе в связи с парадоксами теории множеств, показавшими, что наивная теория множеств приводит к противоречиям. Устранение парадоксов оказалось возможным только на пути аксиоматич. ограничения принципа, состоящего в том, что всякое свойство определяет множество всех объектов, обладающих этим свойством. Разл. ограничения приводят к разл. вариантам А. т. м.

Первая и наиболее известная из А. т. м. – теория Цермело – Френкеля, определяющая построение множеств шаг за шагом, т. е. на каждом конечном или трансфинитном шаге рассматриваются только те множества, все элементы которых уже построены на предшествующих шагах. Понятие трансфинитного шага также находит в этой теории строгое определение. Эта теория формулируется в \in -языке, т. е. в языке с единственным исходным неопределяемым символом \in принадлежности: $x \in X$ понимается как « x есть элемент множества X ». Множество Y называется подмножеством множества X , если каждый элемент множества Y принадлежит и множеству X (обозначается $Y \subseteq X$).

Ключевыми в теории Цермело – Френкеля (теории ZF) являются следующие аксиомы. 1) Аксиома экстенциональности (объёмности), утверждающая, что любые два множества, содержащие одни и те же элементы, равны друг другу. 2) Аксиома выделения, утверждающая, что совокупность всех элементов данного множества, удовлетворяющих определённому свойству, является множеством. 3) Аксиома бесконечности, утверждающая существование бесконечного множества определённого вида, именно, непустого множества X такого, что $x \in X \rightarrow \{x\} \in X$, где $\{x\}$ – множество, единственным элементом которого является x . 4) Аксиома степени, утверждающая, что совокупность $P(X)$ всех подмножеств данного множества является множеством. 5) Аксиома подстановки, утверждающая, что если для каждого элемента x данного множества X каким-то образом задано множество $f(x)$, то совокупность $\{f(x) : x \in X\}$ всех так определённых множеств $f(x)$ является множеством. 6) Аксиома регулярности, утверждающая, что каждое непустое множество X содержит \in -минимальный элемент x , т. е. x не содержит элементов множества X .

К этой системе может присоединяться аксиома выбора AC, утверждающая, что для любого множества X , состоящего из непустых попарно не имеющих общих элементов множеств x , существует множество Y , имеющее ровно один общий элемент с каждым $x \in X$. Расширенная таким образом система обозначается ZFC.

Аксиомы 1–4 и аксиома выбора были введены Э. [Цермело](#) в 1908; вместе с некоторыми аксиомами технич. характера они образуют А. т. м. Цермело Z или ZC (соответственно, в отсутствии или присутствии аксиомы выбора). Аксиома 5 была введена А. Френкелем и норв. математиком Т. Сколемом в 1922, аксиома 6 – Дж. фон [Нейманом](#) в 1923.

К теориям Z и ZF примыкают теория типов, соответствующая первым $\omega + \omega$ шагам описанной выше схемы трансфинитного построения множеств, где ω – первое трансфинитное число (равное порядковому типу множества всех натуральных чисел), и теория классов фон Неймана – Бернаиса – Гёделя NBG, в которой вместе с множествами разрешается рассматривать и классы, т. е. совокупности множеств, которые сами не являются множествами (напр., класс всех множеств); формально классы отличаются от множеств тем, что они не являются элементами др. классов (и множеств). На совершенно иной идее построена А. т. м. Куайна NF, в которой требуется, чтобы все переменные формулы, выражающей рассматриваемое свойство, могли быть индексированы так, что индекс y был ровно на единицу больше индекса x всякий раз, когда выражение $x \in y$ встречается в этой формуле.

Развитие А. т. м. показало, что объекты содержательной математики могут рассматриваться как множества, соответственно каждое утверждение содержательной математики может быть сформулировано как утверждение о множествах, и, наконец, каждое математически корректное доказательство может быть формализовано как доказательство в теории ZFC (в большинстве случаев достаточной является теория ZC). В этом смысле А. т. м. ZFC является аксиоматич. базисом совр. математики.

А. т. м. позволила доказать формальную неразрешимость, т. е. невозможность получить ответ «да» или «нет» на поставленный вопрос, для таких проблем, как проблема континуума, проблема измеримости и ряд др. проблем в дескриптивной теории множеств.

Литература

Лит.: Гедель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 1; Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств // Труды математического института АН СССР. 1951. Т. 38; Quine W. O. *van*. Set theory and its logic. Camb., 1963; Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1966; Козн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969; Справочная книга по математической логике. М., 1982. Ч. 2: Теория множеств.

Processing math: 0%